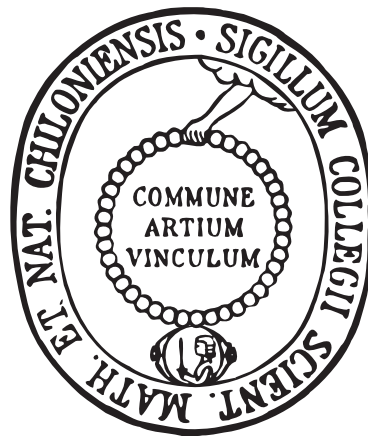


# Schnittvolumina hochdimensionaler konvexer Körper

## Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades  
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Christian-Albrechts-Universität  
zu Kiel



vorgelegt von

**Patryk Brzezinski**

Kiel

November 2011

# Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich ganz herzlich bei meinem Doktorvater Prof. Dr. Hermann König für die Wahl des interessanten Themas und vor allem für seine hervorragende Betreuung dieser Arbeit bedanken. Für die viele Zeit, die er sich für meine Fragen und Anliegen genommen hat, und für seine hilfreichen Ratschläge und Hinweise gilt ihm mein besonderer Dank.

Mein Dank gilt auch der Arbeitsgruppe Analysis und Stochastik, insbesondere Dr. Jörn Peter und Dr. Sören Christensen. Sie haben durch zahlreiche Diskussionen mathematischer und nichtmathematischer Natur meine Doktorandenzeit bereichert und mich bei der Revision dieser Arbeit unterstützt.

Nicht zuletzt möchte ich mich bei meinen Eltern, Regina und Zenon, meinen beiden Brüdern, Simon und Thomas, und bei meiner Freundin Miriam für die Liebe, die moralische Unterstützung und die Geduld, die sie in den letzten Jahren für mich aufgebracht haben, bedanken.

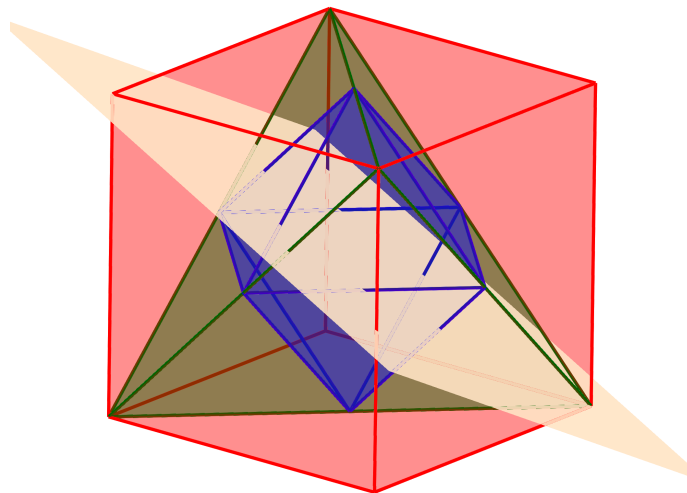




# Schnittvolumina hochdimensionaler konvexer Körper

## Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades  
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Christian-Albrechts-Universität  
zu Kiel



vorgelegt von  
**Patryk Brzezinski**

Kiel  
November 2011

Referent:

Prof. Dr. Hermann König

Korreferent/in:

Prof. Dr. Walter Bergweiler

Tag der mündlichen Prüfung:

3. Februar 2012

Zum Druck genehmigt:

Kiel, den 3. Februar 2012

Prof. Dr. Lutz Kipp, Dekan

# Zusammenfassung

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit Schnittvolumina in konvexen und sternförmigen Körpern, die durch Hyperebenen induziert werden.

Wir studieren zunächst die kritischen Volumina der Schnitte von Hyperebenen mit der Einheitskugel aus dem Raum  $l_p^n(l_2^m)$  für alle  $p \in (0, 2] \cup \{\infty\}$  und  $m, n \in \mathbb{N}$ . Dazu stellen wir mehrere Volumenformeln für Schnitte auf und zeigen mit ihnen, dass der Normalenvektor  $(1, 0, \dots, 0)$  das minimale Volumen des Schnittes durch den Ursprung für  $p = \infty$  erzeugt. Weiterhin geben wir eine obere Abschätzung für die  $(n-1)$ -dimensionalen Volumina für den Fall  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  und  $p = \infty$  an. Im Grenzfall  $n \rightarrow \infty$  wird diese Schranke für den Normalenvektor  $(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}})$  angenommen.

Ein weiterer Schwerpunkt dieser Arbeit ist der Beweis der Aussage, der Normalenvektor  $(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}})$  erzeuge das minimale und der Normalenvektor  $(1, 0, \dots, 0)$  das maximale Volumen des Schnittes durch den Ursprung für  $p \in (0, 2]$ .

Im zweiten Themenblock dieser Arbeit untersuchen wir die kritischen Volumina von Schichten in der Einheitskugel des Raumes  $l_\infty^n(l_2^m)$ . Hierbei formulieren wir mehrere Volumenformeln für Schichten, um im weiteren Verlauf mit ihrer Hilfe zu zeigen, dass das Volumen der Schicht senkrecht zu dem Normalenvektor  $(1, 0, \dots, 0)$  mit der Breite  $t$  minimal für alle  $t \in [0, \frac{m+2}{m+3}]$  und  $m \in \mathbb{N}_{\leq 3}$  ist. Ferner diskutieren wir den Fall  $m \in \mathbb{N}_{\geq 4}$ .

Weiterhin beweisen wir das Folgende: Das Volumen der Schicht senkrecht zu dem Normalenvektor  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0)$  der Breite  $t$  ist kleiner als das Volumen der Schicht senkrecht zu dem Normalenvektor  $(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}})$  der Breite  $t$  für alle beliebig kleinen  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  und für alle  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  sowie fast alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Für den Fall  $m = 1$  zeigen wir das Analogon zu der Abschätzung des Volumens von Schnitten, und zwar, dass das Volumen der Schicht mit sehr dünner Breite Richtung des Vektors  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0)$  maximal unter allen Volumina der entsprechenden Schichtbreiten und einer Vielzahl von Richtungen ist.

Der Fall  $m = 2$  ergibt sich für die Schicht der Breite  $t$  Richtung des Vektors  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0)$  ein kleineres Volumen als für die Schicht der Breite  $t$  Richtung des Vektors  $(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}})$  für alle  $t \in [\frac{1}{n}, \frac{5}{11}]$ .

Im dritten Themenbereich der Arbeit befassen wir uns noch genauer mit den Volumina von Schnitten, nicht notwendigerweise durch den Ursprung, und Schichten der Einheitskugel des Raumes  $l_1^n(l_2^1)$ . Für diese stellen wir weitere Volumenformeln auf und errechnen mit ihnen für den 2- und 3-dimensionalen  $l_1$ -Ball die globalen Minima und Maxima in Abhängigkeit des Abstandes vom Ursprung bzw. der Dicke der Schicht.

Der letzte Gegenstand dieser Arbeit ist das Studium der Schnitte durch den Schwerpunkt des  $n$ -dimensionalen regulären Simplex. Wir entwickeln eine Volumenformel für diese und zeigen, dass  $\frac{\sqrt{n+1}}{(n-1)!} \frac{1}{\sqrt{3e}} \frac{1}{e}$  eine untere Schranke für alle Schnittvolumina durch den Schwerpunkt ist.





# Abstract

This thesis deals with volumes of hyperplane sections of convex and star-shaped bodies.

In the first part we study the extremal volumes of central hyperplane sections of unit balls in the space  $l_p^n(l_2^m)$  for all  $p \in (0, 2] \cup \{\infty\}$  and  $m, n \in \mathbb{N}$ . To this end we give multiple formulas for volumes and use them to show that the normal vector  $(1, 0, \dots, 0)$  generates the minimal volume in the case  $p = \infty$ . Furthermore we give an upper bound for the  $(n - 1)$ -dimensional volumes for  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  and  $p = \infty$ . For  $n \rightarrow \infty$  this bound is attained for the normal vector  $(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}})$ .

Another central result of this thesis is the statement that the normal vector  $(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}})$  minimizes and that  $(1, 0, \dots, 0)$  maximizes the volume for  $p \in (0, 2]$ .

In the second part we consider the extremal volumes of slabs in the unit ball in the space  $l_\infty^n(l_2^m)$ . We give volume formulas for slabs to prove that the volume of the slab orthogonal to  $(1, 0, \dots, 0)$  with width  $t$  is minimal for all  $t \in [0, \frac{m+2}{m+3}]$  and  $m \in \mathbb{N}_{\leq 3}$ . Moreover we discuss the case  $m \in \mathbb{N}_{\geq 4}$ .

Furthermore we prove the following fact: The volume of the slab orthogonal to  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0)$  with width  $t$  is smaller than the volume of the slab orthogonal to  $(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}})$  with width  $t$  for all arbitrary small  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , for all  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  and almost all  $n \in \mathbb{N}$ .

For  $m = 1$  we show an analogous result to that obtained for the estimation of the volumes of sections: The volume of a slab with very small width orthogonal to  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0)$  is maximal compared to all other volumes of slabs with corresponding width and a large class of normal vectors.

For  $m = 2$  we obtain that for a slabs of width  $t$  and normal vector  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0)$  the volume is smaller than the volume for a slab of width  $t$  and normal vector  $(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}})$  for all  $t \in [\frac{1}{n}, \frac{5}{11}]$ .

In the third part we study volumes of non-central sections and slabs in the unit ball of the space  $l_\infty^n(l_2^1)$  more detailed. We get further volume formulas and additionally find the global minimal and maximal values for the 2- and 3-dimensional  $l_1$ -ball given the distance to the origin respectively the width of the slab.

In the last part of this thesis we consider sections through the centroid of the  $n$ -dimensional regular simplex. We state a volume formula and show that  $\frac{\sqrt{n+1}}{(n-1)!} \frac{1}{\sqrt{3}e} \frac{1}{e}$  is a lower bound for the volume of sections through the centroid.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1 Algebren-Multiplikation und Skalarprodukt auf Moduln</b>	<b>9</b>
1.1 Algebren-Multiplikation . . . . .	11
1.2 C*-Algebra und Skalarprodukt auf Moduln . . . . .	16
1.3 Algebren-Multiplikation als Orthogonale Abbildung . . . . .	20
<b>2 Volumenformeln für Schnitte und Schichten im verallgemeinerten Würfel</b>	<b>25</b>
2.1 Analytische Volumenformeln . . . . .	26
2.2 Stochastische Volumenformeln . . . . .	31
<b>3 Untere und obere Schranke für Schnitte im verallgemeinerten Würfel</b>	<b>34</b>
3.1 Untere Schranke für Schnitte durch den Ursprung . . . . .	35
3.2 Obere Schranke für Schnitte durch den Ursprung . . . . .	37
<b>4 Untere und obere Schranke für Schichten im verallgemeinerten Würfel</b>	<b>70</b>
4.1 Untere Schranke für Schichten . . . . .	70
4.2 Obere Schranke für Schichten . . . . .	85
4.2.1 Obere Schranke für Schichten in $l_\infty^n(l_2^m)$ . . . . .	88
4.2.2 Obere Schranke für Schichten in $l_\infty^n(l_2^2)$ . . . . .	91
4.2.3 Obere Schranke für Schichten in $l_\infty^n(l_2^1)$ . . . . .	95
<b>5 Schnitte und Schichten in der verallgemeinerten <math>l_p</math>-Einheitskugel</b>	<b>100</b>
5.1 Implizite Volumenformel für Schnitte durch den Ursprung . . . . .	101
5.2 Untere und obere Schranke für Schnitte durch den Ursprung . . . . .	113
5.3 Volumenformeln für Schnitte und Schichten in $l_1^n(l_2^1)$ . . . . .	115
5.4 Extrema von Schnitten und Schichten in $l_1^2(l_2^1)$ und $l_1^3(l_2^1)$ . . . . .	129
<b>6 Schnitte im regulären Simplex</b>	<b>153</b>
6.1 Volumenformel für Schnitte durch den Schwerpunkt . . . . .	154
6.2 Untere Schranke für Schnitte durch den Schwerpunkt . . . . .	157
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>163</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>165</b>
<b>Index</b>	<b>169</b>



# Einleitung

In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns mit Schnitten und Schichten in konvexen und sternförmigen Körpern aus dem Raum  $\mathbb{R}^{mn}$ . Diesen Raum betrachten wir, weil wir diese Körper hauptsächlich, bis auf den  $n$ -dimensionalen regulären Simplex aus Kapitel sechs, mit Hilfe der Norm

$$\|x\|_{2,p} = \|(x_1, \dots, x_n)\|_{2,p} = \begin{cases} \max_{j \in \mathbb{N}_{\leq n}} \|x_j\|_2, & \text{falls } p = \infty, \\ \left( \sum_{j=1}^n \|x_j\|_2^p \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{falls } p \neq \infty \end{cases}$$

für alle  $x = (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^m)^n$  und  $p \in \mathbb{R}_{>0} \cup \{\infty\}$  erzeugen. Wir bewegen uns also im Folgenden in dem normierten Raum  $l_p^n(l_2^m) = ((\mathbb{R}^m)^n, \|\cdot\|_{2,p})$ , in dem wir die Einheitskugel bzgl. der Norm  $\|\cdot\|_{2,p}$  mit Hyperebenen des Raumes schneiden. Dabei setzen wir den Schwerpunkt auf das Auffinden von unteren und oberen Schranken sowie der Minima und Maxima für das Volumen von Schnitten und Schichten. Wir verstehen z. B. in dem Raum  $l_p^n(l_2^1)$  bzw.  $l_p^n(l_2^2)$  unter Schichten der Dicke  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , die senkrecht zu der Richtung  $a \in S^{n-1}$  stehen, den Schnitt der Einheitskugel bzgl. der Norm  $\|\cdot\|_{2,p}$  mit der Menge  $\left\{x \in \mathbb{R}^n : |\langle x, a \rangle_{\mathbb{R}}| \leq \frac{t}{2}\right\}$  bzw. mit der Menge  $\left\{x \in \mathbb{C}^n : |\langle x, a \rangle_{\mathbb{C}}| \leq \frac{t}{\sqrt{\pi}}\right\}$ . Wie die entsprechenden Schichten in dem allgemeinen Raum  $l_p^n(l_2^m)$  aussehen, werden wir im späteren Verlauf klären. Für die Vorstellung genügen erst einmal die oberen Definitionen. Wegen der Konvexität der Körper im Fall  $p \in \mathbb{R}_{\geq 1}$  reicht es, sich nur die Schnitte durch den Ursprung anzuschauen.

Zunächst möchten wir klären, woher der Ursprung des Interesses für diese Objekte rührt.

Dazu richten wir als erstes unseren Fokus auf den  $n$ -dimensionalen Würfel  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n$ , der die auf das Volumen 1 normierte Einheitskugel bzgl. der Norm  $\|\cdot\|_{2,\infty} = \|\cdot\|_{\infty}$  im  $\mathbb{R}^n$  ist. Hensley war der erste, der 1980 in [14] einen Beweis für die Aussage, dass das  $(n-1)$ -dimensionale Volumen des Schnittes einer affinen Hyperebene mit dem Würfel  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n$  zwischen 1 und 5 liegt, lieferte. Dort vermutet er außerdem die Schranke 5 durch das Maximum  $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$  ersetzen zu können. Letzteres zeigte Ball 1986 in [3]. Für den Beweis der unteren Schranke 1, die z. B. senkrecht zu der Richtung  $(1, 0, \dots, 0)$  angenommen wird, benutzte Hensley stochastische Methoden. Bei der oberen Abschätzung verwendeten beide fourieranalytische Methoden, mit denen sie die folgende Volumenformel von Pólya aus [33, 1913] für Schnitte durch den Ursprung des Würfels aufstellten:

$$(1) \quad \text{vol}_{n-1} \left( \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]^n \cap H_a^0 \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \prod_{j=1}^n \frac{\sin(a_j s)}{a_j s} \right) ds$$

für alle  $a \in S^{n-1}$  und  $H_a^0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \langle x, a \rangle_{\mathbb{R}} = 0 \right\}$ . Hierzu sei angemerkt: Laplace verifizierte 1812 in [26] die Identität

$$\text{vol}_{n-1} \left( \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]^n \cap H_{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}^0 \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \right)^n ds.$$

Der maximale Schnitt im Würfel des  $\mathbb{R}^2$  liegt senkrecht zu der Richtung  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ . Das verleitet zu der intuitiven Annahme, der maximale Schnitt des Würfels im  $\mathbb{R}^n$  liege immer senkrecht zu der Richtung  $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ . Dazu werden wir später das Grenzwertverhalten

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \right)^n ds = \frac{6}{\sqrt{\pi}}$  einsehen, das sich als Spezialfall einer allgemeineren Gleichung ergeben wird. Offensichtlich folgt aus der obigen Diskussion die Ungleichung  $\frac{6}{\sqrt{\pi}} > \sqrt{2}$ , die gewiss der Intuition widerspricht (vgl. [24, S. 1]). Zusätzlich gilt die Identität

$$\text{vol}_{n-1} \left( \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]^n \cap H_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0\right)}^0 \right) = \sqrt{2}.$$

Die Abschätzung der Schnittvolumina im Würfel  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$  durch  $\sqrt{2}$  ist ein wichtiges Gegenbeispiel für die Vermutung von Busemann und Petty [6, 1956]. Sie formulierten die folgende Frage: Wenn zwei ursprungssymmetrische konvexe Körper  $K$  und  $L$  aus dem  $\mathbb{R}^n$  mit der Eigenschaft

$$(2) \quad \text{vol}_{n-1}(K \cap H_a^0) \leq \text{vol}_{n-1}(L \cap H_a^0) \quad \text{für alle } a \in S^{n-1}$$

gegeben sind, ergibt sich dann aus dieser Eigenschaft (2) die Ungleichung  $\text{vol}_n(K) \leq \text{vol}_n(L)$ ? Betrachten wir dazu die normierte Einheitskugel  $\overline{B}_2^n\left(0, \kappa_n^{-\frac{1}{n}}\right)$  von  $n$ -dimensionalem Volumen 1, wobei  $\kappa_n$  das  $n$ -dimensionale Volumen der Einheitskugel in  $\mathbb{R}^n$  ist, so gilt die Identität  $\overline{B}_2^n\left(0, \kappa_n^{-\frac{1}{n}}\right) \cap H_a^0 = \overline{B}_2^{n-1}\left(0, \kappa_n^{-\frac{1}{n}}\right)$  für alle  $a \in S^{n-1}$ . Daraus folgt die Aussage

$$\text{vol}_{n-1}\left(\overline{B}_2^n\left(0, \kappa_n^{-\frac{1}{n}}\right) \cap H_a^0\right) = \text{vol}_{n-1}\left(\overline{B}_2^{n-1}\left(0, \kappa_n^{-\frac{1}{n}}\right)\right) = \frac{\left(\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)\right)^{1-\frac{1}{n}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{e}.$$

Für  $n = 10$  ist damit  $\text{vol}_{n-1}\left(\overline{B}_2^n\left(0, \kappa_n^{-\frac{1}{n}}\right) \cap H_a^0\right) \approx 1.420385908 > \sqrt{2}$ . (vgl. [28, S. 2])

Die Vermutung ist aber nicht nur für den Fall  $n = 10$  falsch, sondern für alle  $n \in \mathbb{N}_{\geq 5}$ . Für die Dimensionen 2, 3 und 4 ist sie jedoch richtig. Die Beweise aller Fälle finden sich in [10].

Als nächstes betrachten wir den normierten Einheitswürfel  $\left(\overline{B}_2\left(0, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)\right)^n$ , mit Hilfe der Norm  $\|\cdot\|_{2,\infty}$  auf dem  $\mathbb{C}^n \cong (\mathbb{R}^2)^n$  erzeugt wird. Oleszkiewicz und Pełczyński bewiesen in [30] im Jahre 2000 die zum Würfel  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$  entsprechende Aussage, das  $2(n-1)$ -dimensionale Volumen des Schnittes einer affinen Hyperebene mit dem Würfel  $\left(\overline{B}_2\left(0, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)\right)^n$  liege zwischen 1 und  $2 = 2^{\frac{2}{2}}$ . Dort wurden beide Schranken optimal gewählt. Der minimale bzw. maximale Schnitt liegt nämlich z. B. senkrecht zu der Richtung  $(1, 0, \dots, 0)$  bzw.  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0\right)$ . Auch in diesem Fall wurde zunächst die folgende Volumenformel für Schnitte durch den Ursprung aufgestellt:

$$(3) \quad \text{vol}_{2(n-1)} \left( \left( \overline{B}_2\left(0, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) \right)^n \cap H_a^0 \right) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \prod_{j=1}^n \frac{2J_1(a_j s)}{a_j s} \right) s ds$$

für alle  $a \in S^{n-1}$  und  $H_a^0 = \left\{ x \in \mathbb{C}^n : \langle x, a \rangle_{\mathbb{C}} = 0 \right\}$ , wobei  $J_1$  die Besselfunktion erster Ordnung ist. Auch hier werden wir später die Gleichung  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{2J_1(\frac{s}{\sqrt{n}})}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \right)^n s \, ds = 2$  einsehen. Demnach gibt es in diesem Fall, im Gegensatz zum Fall davor, für  $n \rightarrow \infty$  keinen Unterschied zwischen dem Volumen des Schnittes senkrecht zu der Richtung  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0)$  und dem senkrecht zu  $(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}})$ .

Die Fragen, die sich nach diesen Resultaten stellen, sind die folgenden:

- (a) Können wir ähnliche Resultate im Raum  $l_{\infty}^n(l_2^m)$  für den Fall  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  beweisen?
- (b) Wie sehen Hyperebenen im Raum  $l_{\infty}^n(l_2^m)$  bzw. ihre Schnitte mit der dortigen Einheitskugel bzgl. der Norm  $\|\cdot\|_{2,\infty}$  aus?
- (c) Können wir für diese Schnitte in Anlehnung an die Formeln (1) und (3) auch eine Volumenformel im Fall  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  aufstellen?

Die Frage (b) klären wir im ersten Kapitel, mit dem wir die Grundlagen für alle weiteren Themen dieser Arbeit schaffen. Dort verfolgen wir das Ziel, auch in dem Raum  $l_{\infty}^n(l_2^m)$  alle Hyperebenen mit Hilfe von Normalenvektoren zu charakterisieren. (Wie wir in der oberen Diskussion bereits eingesehen haben, sind beide Volumenformeln abhängig von den Normalenvektoren.) Deshalb werden wir eine Art Skalarprodukt auf dem  $(\mathbb{R}^m)^n$  – wohlgermerkt mit Werten in  $\mathbb{R}^m$  – definieren. Dazu ist offensichtlich eine „gutartige“ Vektormultiplikation im  $\mathbb{R}^m$  vonnöten, die wir im selben Kapitel konstruieren werden.

In der obigen Diskussion haben wir uns mit ursprungssymmetrischen konvexen und sternförmigen Körpern beschäftigt. Intuitiv ist dabei klar, dass wir uns ohne Einschränkung auf die Richtungen  $a \in S^{n-1}$  mit  $1 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n \geq 0$  beschränken können. (Deshalb kommen diese Normalenvektoren auch in jedem obigen Beispiel vor.) Diesen Sachverhalt beweisen wir ebenfalls in Kapitel eins. Für den Fall  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  werden wir jedoch von vornherein von speziellen Richtungen ausgehen, da diese Einschränkung sämtliche Betrachtungen vereinfacht.

Das zweite Kapitel beschäftigt sich ausschließlich mit der Beantwortung der Frage (c). Dort werden wir nicht nur eine Verallgemeinerung der Formeln (1) und (3) für den Fall  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  finden, sondern auch eine Formel für alle Schnitte, die nicht notwendigerweise durch den Ursprung verlaufen, beweisen. Weiterhin werden wir eine Volumenformel für Schichten entwickeln, die im vierten Kapitel eine bedeutende Rolle einnimmt. Der Beweis der Volumenformel für Schnitte nutzt – wie oben schon erwähnt – fourieranalytische Methoden. Der Beweis der Volumenformel für Schichten mit besagten Methoden ist hingegen neu. Zusätzlich zu den beiden Formeln formulieren wir mit deren Hilfe zwei stochastische Volumenformeln für Schichten und Schnitte durch den Ursprung. König und Koldobsky haben die letzteren beiden Formeln schon für den Fall  $m = 2$  in [19] bewiesen. Die analytische Volumenformel wird für die obere und die stochastischen Volumenformeln für die untere Abschätzung der Volumina von Schnitten und Schichten benötigt.

Mit der Fragestellung (a) beschäftigen wir uns in Kapitel drei. Im ersten dieses Kapitels beweisen wir für alle  $m, n \in \mathbb{N}$  und  $a \in S^{n-1}$  mit  $1 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n \geq 0$  die Ungleichung

$$1 \leq \text{vol}_{m(n-1)} \left( \left( \overline{B}_2 \left( 0, \kappa_m^{-\frac{1}{m}} \right) \right)^n \cap H_a^0 \right),$$

wobei  $\left(\overline{B}_2\left(0, \kappa_m^{-\frac{1}{m}}\right)\right)^n$  der Würfel bzw. die normierte Einheitskugel bzgl. der Norm  $\|\cdot\|_{2,\infty}$  im Raum  $l_\infty^n(l_2^m)$  ist.

Wie bereits in der oberen Diskussion angedeutet nähert sich der Grenzwert des Volumens des Schnittes senkrecht zu dem Vektor  $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$  für  $n \rightarrow \infty$  dem Volumen des Schnittes senkrecht zu der Richtung des Vektors  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0\right)$ . Deshalb ist es nicht erstaunlich, dass die obere Schranke für das  $m(n-1)$ -dimensionale Volumen für Schnitte durch den Ursprung nicht  $2^{\frac{m}{2}}$  ist und damit auch nicht senkrecht zu der Richtung  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0\right)$  liegt. Wir werden nämlich für alle  $m, n \in \mathbb{N}$  die allgemeine Identität

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{2^m (\Gamma(\frac{m}{2} + 1))^2} \int_0^\infty \left( j_{\frac{m}{2}} \left( \frac{s}{\sqrt{n}} \right) \right)^n s^{m-1} ds \right) = \frac{(2m+4)^{\frac{m}{2}}}{m 2^{m-1} \Gamma(\frac{m}{2})}$$

und für alle  $a \in S^{n-1}$  mit  $1 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n \geq 0$  die Ungleichung

$$(4) \quad \text{vol}_{m(n-1)} \left( \left( \overline{B}_2\left(0, \kappa_m^{-\frac{1}{m}}\right) \right)^n \cap H_a^0 \right) \leq \frac{(2m+4)^{\frac{m}{2}}}{m 2^{m-1} \Gamma(\frac{m}{2})}$$

zeigen. Aus den beiden Aussagen und aus der Tatsache, dass ab  $m = 3$  die Ungleichung  $2^{\frac{m}{2}} < \frac{(2m+4)^{\frac{m}{2}}}{m 2^{m-1} \Gamma(\frac{m}{2})}$  gilt, folgt: Das Volumen des Schnittes senkrecht zu der Richtung  $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$  ist größer als das Volumen des Schnittes senkrecht zu der Richtung  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0\right)$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ . Für den Beweis der Ungleichung (4) nutzen wir hauptsächlich Modifikationen der Methoden, die Nazarov und Podkorytov in [28] für die Verbesserung des Beweises von Ball in dem Fall  $m = 1$ , also für die Abschätzung

$$(5) \quad \text{vol}_{n-1} \left( \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]^n \cap H_a^0 \right) \leq \sqrt{2}$$

für alle  $a \in S^{n-1}$  mit  $1 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n \geq 0$ , angewendet haben. Weiterhin profitieren wir für alle  $m \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  von dem Beweis der folgenden Ungleichung, die Oleszkiewicz und Pełczyński für  $m = 2$  und für alle  $a \in S^{n-1}$  mit  $1 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n \geq 0$  verifizierten:

$$\text{vol}_{2(n-1)} \left( \left( \overline{B}_2\left(0, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) \right)^n \cap H_a^0 \right) \leq 2.$$

In Kapitel vier widmen wir uns den Schichten in dem Raum  $l_\infty^n(l_2^m)$ . (Wie eine Schicht im Würfel  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$  definiert ist, können wir unten dem Ausdruck in der Ungleichung (6) entnehmen.) Es stellt sich selbstverständlich sofort die Frage, ob die minimalen und maximalen Schichten der entsprechenden Breite in derselben Richtung wie bei Schnitten durch den Ursprung liegen. Diesbezüglich vermutete Milman, der den Raum  $l_\infty^n(l_2^1)$  betrachtete, dass die minimale Schicht, deren Dicke kleiner als eine bestimmte Konstante ist, die nicht von der Dimension des Raumes  $l_\infty^n(l_2^1)$  abhängt, senkrecht zu der Richtung  $(1, 0, \dots, 0)$  liegt. Diese Vermutung bewiesen Barthe und Koldobsky im Jahre 2003 in [5]. Dort zeigten sie für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t \in [0, \frac{3}{4}]$  und  $a \in S^{n-1}$  mit  $1 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n \geq 0$  die Abschätzung

$$(6) \quad \begin{aligned} t &= \text{vol}_n \left( \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]^n \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \left| \langle x, (1, 0, \dots, 0) \rangle_{\mathbb{R}} \right| \leq \frac{t}{2} \right\} \right) \\ &\leq \text{vol}_n \left( \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]^n \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \left| \langle x, a \rangle_{\mathbb{R}} \right| \leq \frac{t}{2} \right\} \right). \end{aligned}$$



Für diese Abschätzung nutzten Barthe und Koldobsky die Ideen von Hensley aus [14], die er sich für den Beweis der unteren Abschätzung für Schnitte durch den Ursprung überlegte. In einer Rechnung für den Fall  $n = 2$  wird sich zeigen, dass die Konstante  $\frac{3}{4}$  nicht optimal ist. Im Jahr 2011 konnten König und Koldobsky in [18] dieses Ergebnis auf den Raum  $l_\infty^n(l_2^2)$  übertragen. Wiederum aufbauend auf Hensley zeigten sie für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t \in [0, \frac{4}{5}]$  und  $a \in S^{n-1}$  mit  $1 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n \geq 0$  die untere Abschätzung

$$\begin{aligned} t^2 &= \text{vol}_{2n} \left( \left( \overline{B}_2 \left( 0, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \right) \right)^n \cap \left\{ x \in \mathbb{C}^n : \left| \left\langle x, (1, 0, \dots, 0) \right\rangle_{\mathbb{C}} \right| \leq \frac{t}{\sqrt{\pi}} \right\} \right) \\ &\leq \text{vol}_{2n} \left( \left( \overline{B}_2 \left( 0, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \right) \right)^n \cap \left\{ x \in \mathbb{C}^n : \left| \langle x, a \rangle_{\mathbb{C}} \right| \leq \frac{t}{\sqrt{\pi}} \right\} \right). \end{aligned}$$

Auch in diesem Fall ist die Konstante  $\frac{4}{5}$  offensichtlich weder von der Dimension des Raumes  $l_\infty^n(l_2^2)$  abhängig noch optimal gewählt.

Ziel des ersten Abschnittes in Kapitel vier ist es, die beiden Abschätzungen auf den Raum  $l_\infty^n(l_2^m)$  zu übertragen, also für alle  $n, m \in \mathbb{N}$  und  $t \in [0, \frac{m+2}{m+3}]$  sowie  $a \in S^{n-1}$  mit  $1 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n \geq 0$  die Ungleichung

$$\begin{aligned} t^m &= \text{vol}_{mn} \left( \left( \overline{B}_2 \left( 0, \kappa_m^{-\frac{1}{m}} \right) \right)^n \cap \left\{ x \in (\mathbb{R}^m)^n : \left| \left\langle x, (1, 0, \dots, 0) \right\rangle_{\mathbb{R}^m} \right| \leq \kappa_m^{-\frac{1}{m}} t \right\} \right) \\ (7) \quad &\leq \text{vol}_{mn} \left( \left( \overline{B}_2 \left( 0, \kappa_m^{-\frac{1}{m}} \right) \right)^n \cap \left\{ x \in (\mathbb{R}^m)^n : \left| \langle x, a \rangle_{\mathbb{R}^m} \right| \leq \kappa_m^{-\frac{1}{m}} t \right\} \right) \end{aligned}$$

zu zeigen, wobei  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^m}$  das erwähnte Skalarprodukt aus dem Raum  $l_\infty^n(l_2^m)$  aus Kapitel eins sein wird. Beispielfür alle  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  beweisen wir dabei nur den Fall  $m = 3$ .

Im zweiten Abschnitt des vierten Kapitels studieren wir – wie auch schon für Schichten durch den Ursprung – zunächst das Grenzverhalten der Schicht, die senkrecht zu dem Vektor  $(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}})$  steht. Wir zeigen für alle  $m, n \in \mathbb{N}$  und  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  die Identität

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \text{vol}_{mn} \left( \left( \overline{B}_2 \left( 0, \kappa_m^{-\frac{1}{m}} \right) \right)^n \cap \left\{ x \in (\mathbb{R}^m)^n : \left| \left\langle x, \left( \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right\rangle_{\mathbb{R}^m} \right| \leq \kappa_m^{-\frac{1}{m}} t \right\} \right) \\ &= \frac{m}{2 \Gamma(\frac{m}{2} + 1)} \int_0^{\frac{m+2}{2} t^2} e^{-s} s^{\frac{m}{2}-1} ds. \end{aligned}$$

Diese Konvergenz ist gleichmäßig auf jedem Kompaktum aus  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ .

Für die weitere Diskussion gehen wir in umgekehrter Reihenfolge vor, d. h. wir betrachten den Fall  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ , bevor wir auf den Fall  $m = 1$  und  $m = 2$  eingehen.

Wie schon im Fall der Schnitte durch den Ursprung werden wir auch im Fall der Schichten für alle  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  eine Konstante  $C_m \in \mathbb{R}_{>0}$  so finden, dass für alle  $t \in [0, C_m]$  und fast alle  $n \in \mathbb{N}$  die Ungleichung

$$\begin{aligned} &\text{vol}_{mn} \left( \left( \overline{B}_2 \left( 0, \kappa_m^{-\frac{1}{m}} \right) \right)^n \cap \left\{ x \in (\mathbb{R}^m)^n : \left| \left\langle x, \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0 \right) \right\rangle_{\mathbb{R}^m} \right| \leq \kappa_m^{-\frac{1}{m}} t \right\} \right) \\ &\leq \text{vol}_{mn} \left( \left( \overline{B}_2 \left( 0, \kappa_m^{-\frac{1}{m}} \right) \right)^n \cap \left\{ x \in (\mathbb{R}^m)^n : \left| \left\langle x, \left( \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right\rangle_{\mathbb{R}^m} \right| \leq \kappa_m^{-\frac{1}{m}} t \right\} \right) \end{aligned}$$

gilt. Diese Tatsache ist selbstverständlich eine logische Konsequenz aus den Resultaten für Schnitte durch den Ursprung. Vor diesem Hintergrund können wir also die Eingangsfrage für den Fall  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  positiv beantworten.

Vor der Betrachtung des Falles  $m = 2$  schauen wir zunächst den Fall  $m = 1$  an. Hier verhält es sich genauso wie bei Schnitten durch den Ursprung. Wir erhalten für alle  $n \in \mathbb{N}$ , sehr kleine  $t \in \mathbb{R}_{>0}$  und alle  $a \in S^{n-1} \setminus \overline{B}_2\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0\right), \varepsilon\right)$  mit  $1 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n \geq 0$  die Ungleichung

$$\begin{aligned} & \text{vol}_n \left( \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]^n \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |\langle x, a \rangle_{\mathbb{R}}| \leq \frac{t}{2} \right\} \right) \\ & \leq \text{vol}_n \left( \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]^n \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \left| \left\langle x, \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0 \right) \right\rangle_{\mathbb{R}} \right| \leq \frac{t}{2} \right\} \right) \\ & = t \left( \sqrt{2} - \frac{t}{2} \right), \end{aligned}$$

wobei  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  „sehr“ klein gewählt werden darf.

Der Fall  $m = 2$  stellt eine Art Kombination der Fälle  $m = 1$  und  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  dar. Es gilt nämlich für alle  $n \in \mathbb{N}_{\geq 18}$  und  $t \in \left[\frac{1}{n}, \frac{5}{11}\right]$  die Ungleichung

$$\begin{aligned} & \text{vol}_{2n} \left( \left( \overline{B}_2\left(0, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) \right)^n \cap \left\{ x \in \mathbb{C}^n : \left| \left\langle x, \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0 \right) \right\rangle_{\mathbb{C}} \right| \leq \frac{t}{\sqrt{\pi}} \right\} \right) \\ & \leq \text{vol}_{2n} \left( \left( \overline{B}_2\left(0, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) \right)^n \cap \left\{ x \in \mathbb{C}^n : \left| \left\langle x, \left( \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right\rangle_{\mathbb{C}} \right| \leq \frac{t}{\sqrt{\pi}} \right\} \right). \end{aligned}$$

In Kapitel fünf betrachten wir den Raum  $l_p^n(l_2^m)$  für  $p \neq \infty$ . Wir beschäftigen uns also mit Schnitten und Schichten in der Einheitskugel  $\overline{B}_{2,p}(0, 1) = \left\{ x \in (\mathbb{R}^m)^n : \|x\|_{2,p} \leq 1 \right\}$ .

Im ersten Abschnitt stellen wir eine implizite Volumenformel für Schnitte durch den Ursprung auf. Eine zu (1) und (3) ähnliche Formel fanden Meyer und Pajor in [27] für den Fall  $m = 1$  und  $p \in [1, 2]$ . Diese erweiterte Koldobsky in [21] auf den Bereich  $p \in \mathbb{R}_{>0}$ . Es ergab sich also für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $a \in S^{n-1}$  mit  $1 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n \geq 0$  die Identität

$$\text{vol}_{n-1}(\overline{B}_{2,p}(0, 1) \cap H_a^0) = \frac{p}{\pi(n-1)\Gamma(\frac{n-1}{p})} \int_0^\infty \left( \prod_{j=1}^n \gamma_p(a_j s) \right) ds,$$

wobei  $\gamma_p$  die Fourier-Transformierte der Funktion  $e^{-|\cdot|^p}$  auf  $\mathbb{R}$  ist. Weiterhin zeigten Koldobsky und Zygonopoulou in [23] für den Fall  $m = 2$  für alle  $p \in (0, 2]$  und  $a \in S^{n-1}$  mit  $1 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n \geq 0$  die Identität

$$(8) \quad \text{vol}_{2(n-1)}(\overline{B}_{2,p}(0, 1) \cap H_a^0) = \frac{p}{2\pi 2(n-1)\Gamma(\frac{2(n-1)}{p})} \int_0^\infty \left( \prod_{j=1}^n \gamma_p(a_j s) \right) s ds,$$

wobei hier  $\gamma_p(s) = \widehat{e^{-\|\cdot\|_2^p}}(s, 0)$  ist. In den Beweisen beider Gleichungen gehen fourieranalytische Methoden entscheidend ein. Diese Methoden nutzen wir gemeinsam mit den Ergebnissen von Kapitel eins, um die beiden Gleichungen auf den Fall  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  auszuweiten. Wir zeigen also für alle  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $a \in S^{n-1}$  mit  $1 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n \geq 0$  und  $p \in (0, 2]$  die Gleichheit

$$(9) \quad \text{vol}_{m(n-1)}(\overline{B}_{2,p}(0, 1) \cap H_a^0) = \frac{\kappa_{m-1}}{(2\pi)^{m-1}\Gamma(\frac{m(n-1)}{p} + 1)} \int_0^\infty \left( \prod_{j=1}^n \gamma_p(a_j s) \right) s^{m-1} ds,$$

wobei  $\gamma_p(s) = \widehat{e^{-\|\cdot\|_2^p}}(s, 0, \dots, 0)$  ist.

Das Volumen (9) für Schnitte durch den Ursprung schätzen wir im zweiten Abschnitt des fünften Kapitels nach unten und oben ab. Die minimalen und maximalen Schnitte durch den Ursprung sind für  $p \in \mathbb{R}_{>2}$  und  $p \in (0, 2)$  in dem Raum  $l_p^n(l_2^1)$  verschieden. Meyer und Pajor bewiesen in [27, 1988], dass der Schnitt senkrecht zum Vektor  $(1, 0, \dots, 0)$  minimal für  $p \in \mathbb{R}_{>2}$  und maximal für  $p \in [1, 2]$  ist. Im Jahre 1992 ergänzte Caetano in [7] die letzte Aussage um  $p \in (0, 1)$ . Weiterhin ist der Schnitt senkrecht zur Richtung  $(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}})$  minimal für  $p = 1$ . Diese Aussage zeigten Meyer und Pajor ebenfalls in [27] und vermuteten dasselbe Ergebnis für  $p \in [1, 2]$ . Diese Vermutung und die Erweiterung der Aussage auf  $p \in (0, 2]$  bestätigte Koldobsky 1998 in [21]. Die Abschätzung nach oben für den Fall  $p \in \mathbb{R}_{>2}$  ist noch ein offenes Problem. Oleszkiewicz zeigte in [29, 2003], dass die Antwort darauf von der Dimension des Raumes  $l_p^n(l_2^m)$  und  $p$  abhängt. (Vgl. [23, S. 185])

Mit dem allgemeinen Fall, also mit Schnitten durch den Ursprung in dem Raum  $l_p^n(l_2^m)$ , beschäftigten sich Meyer und Pajor in [27] sowie Barthe in [4, 2001]. Zusammen bewiesen sie den zu  $m = 1$  analogen Fall, dass der Schnitt senkrecht zum Normalenvektor  $(1, 0, \dots, 0)$  für  $p \in \mathbb{R}_{>2}$  minimal und für  $p \in (0, 2]$  maximal ist. Koldobsky und Zymonopoulou schätzten im Jahre 2003 in [23] das Volumen in (8) nach unten ab. Sie bewiesen die Minimalität des Volumens vom Schnitt durch den Ursprung senkrecht zu dem Vektor  $(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}})$  für den Fall  $m = 2$  und  $p \in (0, 2]$ . Weiterhin bestätigten sie dort das Maximum von Meyer, Pajor und Barthe für diesen Fall. Dazu nutzten sie die log-Konvexität der Funktion  $\gamma_p(\sqrt{\cdot})$  aus.

Wie oben erwähnt, schätzen wir das Volumen in (9) ab. Dabei nutzen wir ebenso die log-Konvexität der Funktion  $\gamma_p(\sqrt{\cdot})$  aus, um das Ergebnis von Koldobsky und Zymonopoulou auf den Fall  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  und  $p \in (0, 2]$  zu erweitern.

Der dritte und vierte Abschnitt des fünften Kapitels widmet sich ausschließlich den Schnitten und Schichten in dem Raum  $l_1^n(l_2^1)$ . Zunächst stellen wir dort eine Volumenformel für Schnitte auf, von der wir dann die Formel für Schichten ableiten. Meyer und Pajor waren die ersten, die in [27] eine Volumenformel für Schnitte durch den Ursprung formulierten. Wir erweitern die Formel nicht nur auf beliebige Schnitte, sondern beweisen sie auch auf einem anderen Weg. Dazu gebrauchen wir auch hier wieder fourieranalytische Methoden kombiniert mit Aussagen über die vandermondesche Determinante.

Die beiden genannten Formeln verwenden wir im vierten Abschnitt für das Bestimmen der globalen Minima und Maxima der Funktionen

$$\begin{aligned} \left\{ a \in S^{n-1} : 1 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n \geq 0 \right\} &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \\ a &\mapsto \text{vol}_{n-1} \left( \overline{B}_{2,1}(0, 1) \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \langle x, a \rangle_{\mathbb{R}} = \frac{t}{2} \right\} \right) \text{ und} \\ \left\{ a \in S^{n-1} : 1 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n \geq 0 \right\} &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \\ a &\mapsto \text{vol}_{n-1} \left( \overline{B}_{2,1}(0, 1) \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |\langle x, a \rangle_{\mathbb{R}}| \leq \frac{t}{2} \right\} \right) \end{aligned}$$

für ein fest vorgegebenes  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  für den Fall  $n \in \{2, 3\}$ . König und Koldobsky fanden in [19, 2011] die Minima und Maxima der Schnitt- und Schichtvolumenfunktion in dem zu  $\overline{B}_{2,1}(0, 1)$  dualen Körper  $\overline{B}_{2,\infty}(0, 1)$ .

Im letzten Kapitel befassen wir uns mit dem  $n$ -dimensionalen regulären Simplex  $S_n$  der Kantenlänge  $\sqrt{2}$ , den wir wegen der griffigeren Definition in den  $\mathbb{R}^{n+1}$  einbetten. Für diesen betrachten wir auch Schnitte mit Hyperebenen durch den Schwerpunkt. Hier sei angemerkt, dass der Simplex, anders als die bereits diskutierten Körper, nicht ursprungssymmetrisch ist.

Im ersten Abschnitt stellen wir auch hier basierend auf den Ergebnissen von Webb in [36] eine Volumenformel für Schnitte durch den Schwerpunkt auf. Wir erhalten für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $a \in S^n$  mit paarweise verschiedenen Komponenten ungleich null und  $\sum_{j=1}^{n+1} a_j = 0$  die Volumenformel

$$\text{vol}_{n-1}(S_n \cap H_a^0) = \frac{\sqrt{n+1}}{(n-1)!} \sum_{\substack{j=1 \\ a_j > 0}}^{n+1} \frac{a_j^{n-1}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n+1} (a_j - a_k)} = -\frac{\sqrt{n+1}}{(n-1)!} \sum_{\substack{j=1 \\ a_j < 0}}^{n+1} \frac{a_j^{n-1}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n+1} (a_j - a_k)}.$$

Wenn wir das Volumen in dieser Formel genauer betrachten, können wir vermuten, dass es maximal für die Richtungen  $a \in \left\{ a \in S^n : a \text{ ist eine Permutation der Einträge des Vektors } \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0 \right) \right\}$  und minimal für die Richtungen  $a \in \left\{ a \in S^n : a \text{ ist eine Permutation der Einträge des Vektors } \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left( -\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, -\frac{1}{\sqrt{n}}, \sqrt{n} \right) \text{ oder } \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left( \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}, -\sqrt{n} \right) \right\}$  ist. In der Tat hat Webb im Jahre 1996 in [36] die erste Vermutung bewiesen. In deren Beweis benutzte Webb Resultate für log-konkave Dichten und Eigenschaften der Faltung sowie die Ideen von Ball, die er sich für den Beweis der Ungleichung (5) überlegte.

Die zweite Vermutung können wir im zweiten Abschnitt des sechsten Kapitels zwar nicht beweisen, aber immerhin eine untere Schranke für das Schnittvolumen angeben. Wir erbringen also für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $a \in S^n$  mit  $\sum_{j=1}^{n+1} a_j = 0$  für die Ungleichung

$$\frac{\sqrt{n+1}}{(n-1)!} \frac{1}{\sqrt{3e}} \frac{1}{e} \leq \text{vol}_{n-1}(S_n \cap H_a^0)$$

einen Nachweis. Auch in diesen Beweis gehen die Eigenschaften von log-konkaven Dichten sowie das Lemma 6.7, das Koldobsky in [24] für die untere Abschätzung des  $(n-1)$ -dimensionalen Volumens der Schnitte durch den Ursprung in dem Raum  $l_\infty^n(l_2^1)$  verwendet, entscheidend ein.

# Kapitel 1

## Algebren-Multiplikation und Skalarprodukt auf Moduln

In diesem Kapitel führen wir die Abbildung  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^m}$  auf dem Raum  $l_p^n(l_2^m)$  ein, die wir das erste Mal in der Ungleichung (7) angegeben haben und die wir für die Charakterisierung von Hyperebenen in  $l_p^n(l_2^m)$  benötigen. Dabei ist für  $m = 1$  bzw.  $m = 2$  der Raum  $(\mathbb{R}^1)^n$  bzw.  $(\mathbb{R}^2)^n$  isomorph zu  $\mathbb{R}^n$  bzw.  $\mathbb{C}^n$ . In beiden Räumen können wir ohne Bedenken Schnitte der Einheitskugeln aus  $l_p^n(l_2^1)$  bzw.  $l_p^n(l_2^2)$  mit Hyperebenen betrachten, die in eine bestimmte Richtung zeigen und die wir mit Hilfe des Skalarproduktes  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  bzw.  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  sowie eines Normalenvektors beschreiben können. Für  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  wurde noch kein Skalarprodukt auf dem  $(\mathbb{R}^m)^n$  definiert. Für eine solche Definition sind wir auf eine entsprechende Multiplikation auf dem  $\mathbb{R}^m$  angewiesen. Wie die Überschrift dieses Kapitels uns verrät, konstruieren wir im Folgenden eine Multiplikation auf dem  $\mathbb{R}^m$ , die diesen Raum mit der Multiplikation zu einer Algebra ausbaut. Mit ihr können wir eine Erweiterung des Skalarproduktes  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}}$  bzw.  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$  definieren. Damit sind wir dann im Stande, Hyperebenen in gewissen Richtungen mit dem Skalarprodukt zu beschreiben. Bevor wir die oben erwähnten Objekte formal einführen, klären wir in den nächsten Schritten, warum diese Beschreibung der Hyperebenen durch Normalenvektoren so wichtig für den Aufbau der Arbeit ist. Dazu notieren wir die

**Definition 1.1.** Seien  $m, n \in \mathbb{N}$  und  $p \in (0, \infty]$ . Wir definieren

(i) den normierten Raum

$$l_p^n(l_2^m) := ((\mathbb{R}^m)^n, \|\cdot\|_{2,p})$$

durch die Norm

$$\|x\|_{2,p} = \|(x_1, \dots, x_n)\|_{2,p} := \begin{cases} \max_{j \in \mathbb{N}_{\leq n}} \|x_j\|_2, & \text{falls } p = \infty, \\ \left( \sum_{j=1}^n \|x_j\|_2^p \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{falls } p \neq \infty \end{cases}$$

für alle  $x = (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^m)^n$ .

(ii) für  $p = \infty$  die normierte Einheitskugel

$$\overline{B}_{2,\infty}(0, r_m) := (\overline{B}_2(0, r_m))^n := \underbrace{\overline{B}_2(0, r_m) \times \dots \times \overline{B}_2(0, r_m)}_{n\text{-mal}}$$

vom Volumen 1, wobei  $r_m := \kappa_m^{-\frac{1}{m}}$  – der Radius der normierten Kugel  $\overline{B}_2(0, r_m) := \left\{x \in \mathbb{R}^m : \|x\|_2 \leq r_m\right\}$  vom Volumen 1 – und  $\kappa_m := \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)}$  das Volumen der Einheitskugel im  $\mathbb{R}^m$  sei, und für  $p \in (0, \infty)$  die Einheitskugel

$$\overline{B}_{2,p}(0, 1) := \left\{x \in (\mathbb{R}^m)^n : \|x\|_{2,p} \leq 1\right\}.$$

Zunächst beschäftigen wir uns mit der Definition von Schnitten mit der normierten Einheitskugel  $(\overline{B}_2(0, r_m))^n$  in den Fällen  $m = 1$  und  $m = 2$  für beliebiges  $n \in \mathbb{N}$ .

Das Ziel ist, das explizite Volumen der Schnitte mit der normierten Einheitskugel in Form einer Volumenformel angeben zu können.

Für  $m = 1$  ist die normierte Einheitskugel  $(\overline{B}_2(0, r_m))^n$  gleich dem  $n$ -dimensionalen Einheitswürfel  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n$  und für  $m = 2$  ist sie gleich dem  $n$ -dimensionalen Kreuzprodukt von Kreisscheiben um Null mit dem Radius  $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ . Stattdessen wir den  $\mathbb{R}^2$  mit der komplexen Multiplikation aus, so verstehen wir unter Schnitten mit der normierten Einheitskugel den Schnitt der Hyperebene  $H_a^{r_m\tau} := \left\{x \in (\mathbb{R}^m)^n : \langle x, a \rangle_{\mathbb{C}} = r_m\tau\right\}$  mit  $(\overline{B}_2(0, r_m))^n$ , wobei  $a \in (\mathbb{R}^m)^n$  ein Normalenvektor mit  $\|a\|_2 = 1$ ,  $\tau \in \mathbb{R}^m$  und  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$  das Skalarprodukt auf  $\mathbb{C}$  für  $m \in \{1, 2\}$  ist.

Im nächsten Schritt werden wir einsehen, dass wir uns bei der Volumenbetrachtung  $\text{vol}_{m(n-1)}\left(H_a^{r_m\tau} \cap (\overline{B}_2(0, r_m))^n\right)$  auf Vektoren  $a \in \mathbb{R}^n$  der Form  $1 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n > 0$  mit  $\|a\|_2 = 1$  beschränken können.

Es ergibt sich für alle  $a = (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^m)^n$  mit  $\|a\|_2 = 1$  und  $\tau \in \mathbb{R}^m$

$$\text{vol}_{m(n-1)}\left(H_a^{r_m\tau} \cap (\overline{B}_2(0, r_m))^n\right) = \int_{\langle x, a \rangle_{\mathbb{C}} = r_m\tau} \chi_{\overline{B}_2(0, r_m)}(x_1) \cdot \dots \cdot \chi_{\overline{B}_2(0, r_m)}(x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Falls es ein  $k \in \mathbb{N}_{\leq n}$  mit  $a_k = 0$  gibt, so ist

$$\begin{aligned} & \text{vol}_{m(n-1)}\left(H_a^{r_m\tau} \cap (\overline{B}_2(0, r_m))^n\right) \\ &= \int_{\langle x, a \rangle_{\mathbb{C}} = r_m\tau} \chi_{\overline{B}_2(0, r_m)}(x_1) \cdot \dots \cdot \chi_{\overline{B}_2(0, r_m)}(x_n) dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n x_j \bar{a}_j = r_m\tau} \chi_{\overline{B}_2(0, r_m)}(x_1) \cdot \dots \cdot \chi_{\overline{B}_2(0, r_m)}(x_n) dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n x_j \bar{a}_j = r_m\tau} \chi_{\overline{B}_2(0, r_m)}(x_1) \cdot \dots \cdot \chi_{\overline{B}_2(0, r_m)}(x_{k-1}) \\ & \quad \cdot \chi_{\overline{B}_2(0, r_m)}(x_{k+1}) \cdot \dots \cdot \chi_{\overline{B}_2(0, r_m)}(x_n) dx_1 \dots dx_{k-1} dx_{k+1} \dots dx_n \\ &= \text{vol}_{m(n-2)}\left(H_{a_{(k)}}^{r_m\tau} \cap (\overline{B}_2(0, r_m))^{n-1}\right), \end{aligned}$$

wobei  $a_{(k)} := (a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ . Also können wir ohne Einschränkung  $a_j \neq 0$  für alle  $j \in \mathbb{N}_{\leq n}$  annehmen. Definieren wir für alle  $j \in \mathbb{N}_{\leq n}$  die Funktion

$u_j : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, x \mapsto \frac{|a_j|}{\bar{a}_j} x$ , dann ist  $u_j$  aus der orthogonalen Gruppe  $O(\mathbb{R}^m)$  für alle  $j \in \mathbb{N}_{\leq n}$ . Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
 & \text{vol}_{m(n-1)} \left( H_a^{r_m \tau} \cap (\bar{B}_2(0, r_m))^n \right) \\
 &= \int_{\langle x, a \rangle_{\mathbb{C}} = r_m \tau} \chi_{\bar{B}_2(0, r_m)}(u_1^{-1}(x_1)) \cdot \dots \cdot \chi_{\bar{B}_2(0, r_m)}(u_n^{-1}(x_n)) \, dx_1 \dots dx_n \\
 &= \int_{\sum_{j=1}^n u_j(y_j) \bar{a}_j = r_m \tau} \chi_{\bar{B}_2(0, r_m)}(y_1) \cdot \dots \cdot \chi_{\bar{B}_2(0, r_m)}(y_n) \, dy_1 \dots dy_n \\
 &= \int_{\sum_{j=1}^n y_j |a_j| = r_m \tau} \chi_{\bar{B}_2(0, r_m)}(y_1) \cdot \dots \cdot \chi_{\bar{B}_2(0, r_m)}(y_n) \, dy_1 \dots dy_n \\
 &= \text{vol}_{m(n-1)} \left( H_{a'}^{r_m \tau} \cap (\bar{B}_2(0, r_m))^n \right),
 \end{aligned}$$

wobei  $a' := (|a_{\sigma(1)}|, \dots, |a_{\sigma(n)}|) \in \mathbb{R}^n$  mit  $1 \geq |a_{\sigma(1)}| \geq \dots \geq |a_{\sigma(n)}| > 0$  für eine passende Permutation  $\sigma \in S_n$ .

Ohne Einschränkung reicht es also für  $m \in \{1, 2\}$  die Normalenvektoren  $a \in \mathbb{R}^n$  mit  $1 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n > 0$  und  $\|a\|_2 = 1$  zu betrachten. Für das Volumen von Schnitten durch  $(\bar{B}_2(0, r_m))^n$  senkrecht zu dieser Art von Vektoren werden wir im zweiten Kapitel eine explizite Volumenformel angeben.

Genauso möchten wir uns für alle  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  auf die eben erwähnten Normalenvektoren einschränken, damit auch in diesen Fällen eine explizite Volumenformel angegeben werden kann. Dazu wird im nächsten Paragraphen geklärt werden, wie wir eine Multiplikation auf dem  $\mathbb{R}^m$  wählen dürfen, um eine geeignete Bilinearform („Skalarprodukt“ mit Werten im  $\mathbb{R}^m$ ) auf dem  $(\mathbb{R}^m)^n$  zu definieren, mit der wir dann geeignete Hyperebenen der  $\mathbb{R}$ -Dimension  $m(n-1)$  betrachten können.

## 1.1 Algebren-Multiplikation

In diesem Abschnitt betrachten wir nur solche Multiplikationen auf dem  $\mathbb{R}^m$ , mit denen der  $\mathbb{R}^m$  zu einer unitalen  $\mathbb{R}$ -Banachalgebra wird. Zusätzlich fordern wir, dass der  $\mathbb{R}^m$  mit diesen Multiplikationen keine nilpotenten Elemente ungleich Null besitzt. All diese Eigenschaften erfüllen bereits der  $\mathbb{R}^1$  mit der Standardmultiplikation sowie der  $\mathbb{R}^2$  mit der komplexen Multiplikation. Erweitern wir die komplexe Multiplikation auf die unten stehende Art und Weise (siehe Lemma 1.2), so wird der  $\mathbb{R}^m$  zu einer unitalen kommutativen  $\mathbb{R}$ -Banachalgebra. Dieses soll ein Beispiel für eine solche unitalen  $\mathbb{R}$ -Banachalgebra ohne nilpotente Elemente sein. Dieses Beispiel studieren wir in den nächsten Schritten, bevor wir uns mit beliebigen  $\mathbb{R}$ -Banachalgebren beschäftigen.

**Lemma 1.2.** Definieren wir für alle  $m \in \mathbb{N}$  die Menge

$$\mathbb{R}_m := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_m \\ -x_m & x_1 & x_2 & \dots & x_{m-1} \\ -x_{m-1} & -x_m & x_1 & \dots & x_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -x_2 & -x_3 & \dots & -x_m & x_1 \end{pmatrix} : x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \right\},$$

so ist  $\mathbb{R}_m$  eine unitäre Unterlgebra von  $\mathbb{R}^{m \times m}$  mit

$$(1.1) \quad \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_m) = m.$$

Insbesondere ist  $\mathbb{R}_m$  eine assoziative Algebra.

**Beweis.** Offensichtlich ist  $\mathbb{R}_m$  ein Teilraum von  $\mathbb{R}^{m \times m}$ . Außerdem ist die Einheitsmatrix  $I_{\mathbb{R}^m}$  in  $\mathbb{R}_m$  enthalten. Seien  $x = (x_1, \dots, x_m), y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ . Es gilt

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_m \\ -x_m & x_1 & x_2 & \dots & x_{m-1} \\ -x_{m-1} & -x_m & x_1 & \dots & x_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -x_2 & -x_3 & \dots & -x_m & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_m \\ -y_m & y_1 & y_2 & \dots & y_{m-1} \\ -y_{m-1} & -y_m & y_1 & \dots & y_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -y_2 & -y_3 & \dots & -y_m & y_1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^1 x_j y_{2-j} - \sum_{j=2}^m x_j y_{m+2-j} & \sum_{j=3}^2 x_j y_{3-j} - \sum_{j=3}^m x_j y_{m+3-j} & \dots & \sum_{j=1}^m x_j y_{m+1-j} - \sum_{j=m+1}^m x_j y_{m+m+1-j} \\ -\sum_{j=1}^m x_j y_{m+1-j} - \sum_{j=m+1}^m x_j y_{m+m+1-j} & \sum_{j=1}^1 x_j y_{2-j} - \sum_{j=2}^m x_j y_{m+2-j} & \dots & \sum_{j=1}^{m-1} x_j y_{m-j} - \sum_{j=m}^m x_j y_{m+m-j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\sum_{j=1}^2 x_j y_{3-j} + \sum_{j=3}^m x_j y_{m+3-j} & -\sum_{j=1}^3 x_j y_{4-j} + \sum_{j=4}^m x_j y_{m+4-j} & \dots & \sum_{j=1}^1 x_j y_{2-j} - \sum_{j=2}^m x_j y_{m+2-j} \end{pmatrix}.$$

Damit ist  $\mathbb{R}_m$  abgeschlossen bzgl. der Matrixmultiplikation. Für den zweiten Teil der Behauptung betrachten wir die Abbildung

$$(1.2) \quad \varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_m, (x_1, \dots, x_m) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_m \\ -x_m & x_1 & x_2 & \dots & x_{m-1} \\ -x_{m-1} & -x_m & x_1 & \dots & x_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -x_2 & -x_3 & \dots & -x_m & x_1 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich ist  $\varphi$  linear und damit nach Definition auch ein Vektorraumisomorphismus. Daraus ergibt sich die Identität  $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_m) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m) = m$ .  $\square$

Mit Hilfe der Abbildung  $\varphi$  aus (1.2) können wir aus der Matrixmultiplikation eine Multiplikation auf dem  $\mathbb{R}^m$  definieren. Wir halten dies in der folgenden Definition fest.

**Definition 1.3.** Seien  $m \in \mathbb{N}$  und  $\varphi$  wie in (1.2) definiert. Wir führen eine Vektormultiplikation auf  $\mathbb{R}^m$  durch die Abbildung

$$\cdot_{\varphi} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, (x, y) \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(x)\varphi(y))$$

ein. Für die  $k$ -te Komponente von  $x \cdot_{\varphi} y$  ergibt sich aus dem Beweis von Lemma 1.2 die Identität

$$(x \cdot_{\varphi} y)_k = \sum_{j=1}^k x_j y_{k+1-j} - \sum_{j=k+1}^m x_j y_{m+k+1-j}$$

für alle  $k \in \mathbb{N}_{\leq m}, x = (x_1, \dots, x_m)$  und  $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ .



Im nächsten Lemma bereiten wir die Tatsache vor, dass der  $\mathbb{R}^m$  ausgestattet mit der Multiplikation  $\cdot_\varphi$  eine kommutative Algebra, die keine von Null verschiedenen nilpotenten Elemente besitzt.

**Lemma 1.4.** *Seien  $m \in \mathbb{N}$  und  $\mathbb{R}_m$  bzw.  $\varphi$  definiert wie in Lemma 1.2 bzw. (1.2). Betrachten wir das Polynom  $p := x^m + 1$  und die Matrix  $E := \varphi((0, 1, 0, \dots, 0))$ , so gilt:*

- (i)  $A = \sum_{j=1}^m a_j E^{j-1}$  für alle  $A \in \mathbb{R}_m$ ,
- (ii)  $p$  ist das Minimalpolynom von  $E$ ,
- (iii)  $p$  hat nur einfache Nullstellen,
- (iv)  $p = \prod_{j=1}^m \left(x - e^{\frac{2j-1}{m}\pi i}\right)$ .

**Beweis.** Zu (i): Sei  $A \in \mathbb{R}_m$ . Dann existiert ein  $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$  mit  $A = \varphi((a_1, \dots, a_m))$ . Weiterhin ist  $E^0 = \varphi((1, 0, \dots, 0))$  und für alle  $2 \leq j \leq m$

$$E^{j-1} = \left(\varphi((0, 1, 0, \dots, 0))\right)^{j-1} = \varphi((0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j\text{-te Stelle}}, 0, \dots, 0)) = \varphi(e_j).$$

Damit ergibt sich

$$A = \varphi((a_1, \dots, a_m)) = \varphi\left(\sum_{j=1}^m a_j e_j\right) = \sum_{j=1}^m a_j \varphi(e_j) = \sum_{j=1}^m a_j E^{j-1}.$$

Zu (ii) und (iii): Zunächst berechnen wir das charakteristische Polynom von  $E$ . Es gilt

$$\text{char}(E) = \det(xI_{\mathbb{R}^m} - E) = (-1)^2 \cdot x \cdot x^{m-1} + (-1)^{n+1} \cdot 1 \cdot (-1)^{n-1} = x^m + 1 = p.$$

Weiter ist  $p \cdot (x^m - 1) = x^{2m} - 1$ . Das Kreisteilungspolynom  $x^{2m} - 1$  besitzt nur einfache Nullstellen. Damit besitzt auch  $p$  nur einfache Nullstellen. Da das Minimalpolynom die gleichen Nullstellen wie das charakteristische Polynom besitzt, ist  $p = \min(E)$ .

Zu (iv): Es gilt die folgende Gleichheit:

$$x^{2m} - 1 = \prod_{j=1}^{2m} \left(x - e^{\frac{j}{m}\pi i}\right).$$

Daraus erhalten wir die Identität

$$p = \prod_{j=1}^m \left(x - e^{\frac{2j-1}{m}\pi i}\right).$$

□

Wir können nun mit dem Lemma 1.4 die Kommutativität der Struktur  $\mathbb{R}_m$  mit der Matrixmultiplikation  $\circ$  beweisen.

**Korollar 1.5.** *Seien  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}_m$  bzw.  $p$  und  $E$  definiert wie in Lemma 1.2 bzw. Lemma 1.4. Es gilt:  $\mathbb{R}_m$  wird von  $E$  erzeugt und*

$$(1.3) \quad \mathbb{R}_m \cong_{\text{Alg}} \mathbb{R}[x]/p\mathbb{R}[x].$$

*Insbesondere ist  $\mathbb{R}_m$  eine kommutative Algebra.*

**Beweis.** Nach Lemma 1.4 und (1.1) gilt die Gleichheit

$$\text{Grad}(\min(E)) = \text{Grad}(p) = m = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_m).$$

Damit ergibt sich die folgende Identität

$$\mathbb{R}_m = \langle E \rangle_{\text{Alg}} = \left\langle \{E^k : k \in \mathbb{N}\} \right\rangle_{\text{vek}}. \quad \square$$

Für weitere Eigenschaften der Struktur  $(\mathbb{R}_m, \circ)$  benötigen wir zusätzlich den

**Satz 1.6.** Für alle  $q \in \mathbb{R}[x]$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i)  $\mathbb{R}[x]/q\mathbb{R}[x]$  hat keine nilpotenten Elemente ungleich Null,
- (ii)  $q$  hat nur einfache Nullstellen.

**Beweis.** Sei  $q \in \mathbb{R}[x]$ .

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sei  $a \in \mathbb{R}$  mit  $q(a) = 0$ . Es reicht  $(x - a)^2 \nmid q$  zu zeigen.

Ann.:  $(x - a)^2 \mid q$ . Setzen wir  $f := \frac{q}{x-a} \in \mathbb{R}[x]$ , so ist  $\text{Grad}(f) < \text{Grad}(q)$  und  $f \neq 0$ . Damit ist  $[f] \neq [0]$ . Aus (i) folgt die Identität  $[f^2] = [f]^2 \neq [0]$ . D. h.  $q \nmid f^2$ . Aus der Annahme ergibt sich  $(x - a) \mid f$ . Setzen wir  $g := \frac{f}{x-a} \in \mathbb{R}[x]$ , so erhalten wir  $q \mid g \cdot q = g \cdot (x - a) \cdot f = f^2$ . Widerspruch!

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei  $[f] \in \mathbb{R}[x]/q\mathbb{R}[x]$  mit  $\text{Grad}(f) < \text{Grad}(q)$  und  $[f] \neq [0]$ .

Ann.:  $[f]^2 = [0]$ . Da nach Voraussetzung  $q \mid f^2$  und  $q$  nach (ii) nur einfache Nullstellen besitzt, erhalten wir die Aussage, dass  $q \mid f$ . Das wiederum ergibt die Gleichheit  $[f] = [0]$ . Widerspruch!  $\square$

**Korollar 1.7.** Seien  $m \in \mathbb{N}$  und  $\mathbb{R}_m$  bzw.  $p$  definiert wie in Lemma 1.2 bzw. Lemma 1.4. Es gilt die Aussage:  $\mathbb{R}_m$  hat keine nilpotenten Elemente ungleich Null.

**Beweis.** Nach (1.3) gilt die Algebrenisomorphie

$$\mathbb{R}_m \cong_{\text{Alg}} \mathbb{R}[x]/p\mathbb{R}[x].$$

Außerdem hat  $p$  nach Lemma 1.4 (ii) nur einfache Nullstellen. Damit liefert uns der Satz 1.6 die Aussage:  $\mathbb{R}[x]/q\mathbb{R}[x]$  besitzt keine nilpotenten Elemente ungleich Null.  $\square$

Das nächste Lemma ist allein für sich genommen ein interessantes Ergebnis, das aus thematischen Gründen an dieser Stelle bewiesen werden soll, obwohl es erst im nächsten Abschnitt relevant wird.

**Lemma 1.8.** Seien  $m \in \mathbb{N}$  und  $\mathbb{R}_m$  definiert wie in Lemma 1.2. Für alle  $A \in \mathbb{R}_m$  ist auch das Transponierte von  $A$  in  $\mathbb{R}_m$ .

**Beweis.** Sei  $E$  bzw.  $\varphi$  definiert wie in Lemma 1.4 bzw. (1.2). Es ist

$$E^T = \varphi((0, \dots, 0, -1)) \in \mathbb{R}_m.$$

Sei  $A \in \mathbb{R}_m$ . Es existiert ein Polynom  $q \in \mathbb{R}[x]$  mit  $A = q(E)$ . Weil das Transponieren ein Algebren-Antiautomorphismus auf  $\mathbb{R}^{m \times m}$  ist, ergibt sich die Aussage:

$$A^T = (q(E))^T = q(E^T) \in \mathbb{R}_m. \quad \square$$

Im anschließenden Korollar notieren wir die letzten nötigen Eigenschaften unserer Beispielstruktur. Weiterhin halten wir fest, dass sich alle Eigenschaften dieser Struktur auf den  $\mathbb{R}^m$  mit der Multiplikation  $\cdot_\varphi$  übertragen lassen.

**Korollar 1.9.** *Sei  $m \in \mathbb{N}$ . Setzen wir  $\|A\|_{op} := \sup_{x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$  für alle  $A \in \mathbb{R}_m$ , so ist  $(\mathbb{R}_m, +, \circ, \|\cdot\|_{op})$  eine unitale kommutative Banachalgebra ohne nilpotente Elemente ungleich Null. Insbesondere ist  $(\mathbb{R}^m, +, \cdot_\varphi, \|\cdot\|_\varphi)$  eine unitale kommutative Banachalgebra ohne nilpotente Elemente ungleich Null, wobei die Identität  $\|x\|_\varphi = \|\varphi(x)\|_{op}$  für alle  $x \in \mathbb{R}^m$  gilt.*

**Beweis.**  $\mathbb{R}_m$  ist eine Banachunteralgebra der Banachalgebra  $(\mathbb{R}^{m \times m}, +, \circ, \|\cdot\|_{op})$ . Nach Korollar 1.5 ist  $\mathbb{R}_m$  kommutativ. Nach Lemma 1.2 ist  $\mathbb{R}_m$  isomorph zu  $\mathbb{R}^m$ .  $\square$

Das Korollar 1.9 zeigt uns explizit, wie eine unitale Banachalgebra ohne nilpotente Elemente aussieht. Mit dieser Vorstellung können wir für den Rest des Kapitels den allgemeinen Fall studieren. Wir betrachten also eine unitale  $\mathbb{R}$ -Banachalgebra  $(\mathbb{R}^m, \cdot)$  ohne nilpotente Elemente ungleich Null. Der nächste Satz hält die Tatsache fest, dass wir uns bis auf Isomorphie auf genau eine unitale Banachalgebra beschränken dürfen. Dazu beweisen wir den

**Satz 1.10.** *Seien  $m \in \mathbb{N}$  und  $(\mathbb{R}^m, +, \cdot, \|\cdot\|)$  eine unitale  $\mathbb{R}$ -Banachalgebra ohne nilpotente Elemente ungleich Null. Es existieren eindeutige  $\eta, \vartheta, \xi \in \mathbb{N}_0$  mit  $m = \eta + 2\vartheta + 4\xi$  und*

$$(1.4) \quad (\mathbb{R}^m, +, \cdot, \|\cdot\|) \simeq (\mathbb{R}^\eta \times \mathbb{C}^\vartheta \times \mathbb{H}^\xi, +, \cdot, \|\cdot\|_\infty),$$

wobei  $\mathbb{H}$  die Quaternionenalgebra ist und in  $\mathbb{R}^\eta \times \mathbb{C}^\vartheta \times \mathbb{H}^\xi$  komponentenweise addiert und multipliziert wird.

**Beweis.** Nach Theorem 6.1 (d) in [25, S. 658] ist das Jacobson Radikal  $J$  von  $(\mathbb{R}^m, +, \cdot, \|\cdot\|)$  nilpotent. Nach Voraussetzung besitzt  $(\mathbb{R}^m, +, \cdot, \|\cdot\|)$  keine nilpotenten Elemente ungleich Null. Also gilt die Gleichheit:  $J = \{0\}$ . Dies ist nach Theorem 6.1 (c) in [25, S. 658] äquivalent dazu, dass die Algebra  $(\mathbb{R}^m, +, \cdot, \|\cdot\|)$  halbeinfach ist. Nach Satz 2.10 in [16, S. 216] existieren eindeutige, bis auf Isomorphie und Reihenfolge,  $r \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}$ -Divisionsalgebren  $D_1, \dots, D_r$  und  $s_1, \dots, s_r \in \mathbb{N}$  mit

$$(\mathbb{R}^m, +, \cdot) \simeq (D_1^{s_1 \times s_1} \times \dots \times D_r^{s_r \times s_r}, +, \circ),$$

wobei in  $(D_1^{s_1 \times s_1} \times \dots \times D_r^{s_r \times s_r}, +, \circ)$  komponentenweise addiert und Matrizenmultiplikation ausgeführt wird. Weil der Ring  $(\mathbb{R}^m, +, \cdot)$  keine nilpotenten Elemente ungleich Null besitzt, gilt  $s_1 = \dots = s_r = 1$ . Daraus ergibt sich die folgende Algebrenisomorphie:

$$(\mathbb{R}^m, +, \cdot) \simeq (D_1 \times \dots \times D_r, +, \circ).$$

Weiterhin existieren nach dem Struktursatz von Mazur [8, S. 201] eindeutige natürliche Zahlen  $\eta, \vartheta, \xi \in \mathbb{N}_0$  mit  $m = \eta + 2\vartheta + 4\xi$  und

$$(\mathbb{R}^m, +, \cdot, \|\cdot\|) \simeq (\mathbb{R}^\eta \times \mathbb{C}^\vartheta \times \mathbb{H}^\xi, +, \cdot, \|\cdot\|_\infty). \quad \square$$

Möchten wir eine kommutative unitale  $\mathbb{R}$ -Banachalgebra  $(\mathbb{R}^m, \cdot)$  ohne nilpotente Elemente betrachten, reicht es sogar bis auf die Isomorphie die kommutative unitale  $\mathbb{R}$ -Banachalgebra  $(\mathbb{R}^\eta \times \mathbb{C}^\vartheta, \cdot)$  zu studieren. Es gilt nämlich das

**Korollar 1.11.** Seien  $m \in \mathbb{N}$  und  $(\mathbb{R}^m, +, \cdot, \|\cdot\|)$  eine unitale kommutative  $\mathbb{R}$ -Banachalgebra ohne nilpotente Elemente ungleich Null. Es existieren eindeutige  $\eta, \vartheta \in \mathbb{N}_0$  mit  $m = \eta + 2\vartheta$  und

$$(1.5) \quad (\mathbb{R}^m, +, \cdot, \|\cdot\|) \simeq (\mathbb{R}^\eta \times \mathbb{C}^\vartheta, +, \cdot, \|\cdot\|_\infty),$$

wobei in  $\mathbb{R}^\eta \times \mathbb{C}^\vartheta$  komponentenweise addiert und multipliziert wird.

**Beweis.** Nach Satz 1.10 existieren eindeutige  $\eta, \vartheta, \xi \in \mathbb{N}_0$  mit  $m = \eta + 2\vartheta + 4\xi$  und

$$(1.6) \quad (\mathbb{R}^m, +, \cdot, \|\cdot\|) \simeq (\mathbb{R}^\eta \times \mathbb{C}^\vartheta \times \mathbb{H}^\xi, +, \cdot, \|\cdot\|_\infty).$$

Da die Banachalgebra  $(\mathbb{R}^m, +, \cdot, \|\cdot\|)$  kommutativ ist, muss  $\xi = 0$  sein. □

Für unsere Beispielbanachalgebra  $(\mathbb{R}^m, +, \cdot_\varphi, \|\cdot\|_\varphi)$  folgt aus Korollar 1.11 das

**Korollar 1.12.** Für alle  $m \in \mathbb{N}$  existieren eindeutige  $\eta, \vartheta \in \mathbb{N}_0$  mit  $m = \eta + 2\vartheta$  so, dass der  $\mathbb{R}^m$  mit der Multiplikation  $\cdot_\varphi$  aus der Definition 1.3 isomorph zu  $(\mathbb{R}^\eta \times \mathbb{C}^\vartheta, +, \cdot, \|\cdot\|_\infty)$  ist.

## 1.2 $C^*$ -Algebra und Skalarprodukt auf Moduln

In diesem Abschnitt geht es darum, die Struktur von  $(\mathbb{R}^m, +, \cdot, \|\cdot\|)$  so zu erweitern, dass wir eine Bilinearform auf dem  $(\mathbb{R}^m)^n$  erhalten, um mit ihrer Hilfe Hyperebenen in  $(\mathbb{R}^m)^n$  definieren zu können. Eingeschränkt auf  $(\mathbb{R}^1)^n$  bzw.  $(\mathbb{R}^2)^n$  soll sich diese Bilinearform mit dem Standardskalarprodukt auf dem  $\mathbb{R}^n$  bzw. dem  $\mathbb{C}^n$  vertragen. Auf dem  $\mathbb{C}^n$  wird das Standardskalarprodukt mit Hilfe der Konjugation definiert. Für unser weiteres Vorgehen ist es wichtig, die Tatsache festzuhalten, dass die Konjugation in  $\mathbb{C}$  eine  $*$ -Involution auf  $\mathbb{C}$  ist. Deshalb zeigen wir in den nächsten Schritten, wie wir eine  $*$ -Involution für unsere  $\mathbb{R}$ -Banachalgebra  $(\mathbb{R}^\eta \times \mathbb{C}^\vartheta \times \mathbb{H}^\xi, +, \cdot, \|\cdot\|_\infty)$  aus Satz 1.10 zu wählen haben, damit wir mit ihr unsere gewünschte Bilinearform erhalten.

**Bezeichnung 1.13.** Seien  $m \in \mathbb{N}$  und  $\eta, \vartheta, \xi \in \mathbb{N}_0$  mit der Eigenschaft  $m = \eta + 2\vartheta + 4\xi$ . Wir bezeichnen mit  $(\mathbb{A}, +, \cdot, \|\cdot\|_\infty)$  die Struktur  $(\mathbb{R}^\eta \times \mathbb{C}^\vartheta \times \mathbb{H}^\xi, +, \cdot, \|\cdot\|_\infty)$ .

Das folgende Lemma führt unsere gewünschte  $*$ -Involution auf  $\mathbb{A}$  ein, die unsere Struktur zu einer unitalen  $C^*$ -Algebra erweitert. Weil die Aussagen des Lemmas offensichtlich sind, beschäftigen wir uns nicht mit dem Beweis.

**Lemma 1.14.** Seien  $m \in \mathbb{N}$  und  $\eta, \vartheta, \xi \in \mathbb{N}_0$  mit  $m = \eta + 2\vartheta + 4\xi$ . Definieren wir die Abbildung

$$\overline{(\cdot)} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}, (r_1, \dots, r_\eta, c_1, \dots, c_\vartheta, h_1, \dots, h_\xi) \mapsto (r_1, \dots, r_\eta, \bar{c}_1, \dots, \bar{c}_\vartheta, \bar{h}_1, \dots, \bar{h}_\xi),$$

so ist  $(\mathbb{A}, +, \cdot, \|\cdot\|_\infty, \overline{(\cdot)})$  eine unitale  $C^*$ -Algebra.

Das nächste Beispiel gibt uns eine Vorstellung, wie eine unitale  $C^*$ -Algebra aussieht. Dazu greifen wir auf das Beispiel im Abschnitt 1.1 zurück.

**Beispiel 1.15.** Sei  $m \in \mathbb{N}$ . Die unitale kommutative  $\mathbb{R}$ -Banachalgebra  $(\mathbb{R}^m, +, \cdot_\varphi, \|\cdot\|_\varphi)$  aus Korollar 1.9 ist mit der  $*$ -Involution  $T_\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, x \mapsto \varphi^{-1}\left((\varphi(x))^T\right)$  eine  $C^*$ -Algebra.

**Beweis.** Nach Lemma 1.8 gilt die Identität  $(\mathbb{R}_m)^T = \mathbb{R}_m$ .  $\square$

Mit unserer \*-Involution können wir ganz nach dem Vorbild der komplexen Konjugation die nachstehende Definition festhalten. Der nächste Schritt wird dann sein, die gewünschten Eigenschaften unseres Skalarproduktes zu prüfen.

**Definition 1.16.** Für alle  $n \in \mathbb{N}$  definieren wir das Standardskalarprodukt auf  $\mathbb{A}^n$  durch

$$(1.7) \quad \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{A}} : \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}, ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \mapsto \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j.$$

Im weiteren Verlauf wollen wir Hyperebenen in  $\mathbb{A}^n$  definieren. Genauer gesagt wollen wir affine Unterräume von  $\mathbb{A}^n$  der Dimension  $m(n-1)$ , die senkrecht zu einem Vektor  $a \in \mathbb{A}^n$  liegen, betrachten. Deshalb notieren wir den folgenden

**Satz 1.17.** Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gelten die folgenden Aussagen:

- (i)  $\mathbb{A}^n$  ist ein  $\mathbb{A}$ -Modul mit der  $\mathbb{A}$ -Basis  $\left\{ \hat{e}_j = (0, \dots, 0, \underbrace{1_{\mathbb{A}}}_{j\text{-te Stelle}}, 0, \dots, 0) : j \in \mathbb{N}_{\leq n} \right\}$ .
- (ii)  $(\mathbb{A}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{A}})$  besitzt keine isotropen Elemente ungleich Null. Insbesondere ist  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{A}}$  nicht ausgeartet.

**Beweis.** Seien  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $\eta, \vartheta, \xi \in \mathbb{N}_0$  mit  $m = \eta + 2\vartheta + 4\xi$  und  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^n \setminus \{0\}$ . Es existiert ein  $k \in \mathbb{N}_{\leq n}$  mit  $x_k \neq 0$ . Damit ist  $x_k \bar{x}_k \neq 0$ . Außerdem gilt für alle  $j \in \mathbb{N}_{\leq n}$

$$\begin{aligned} x_j \bar{x}_j &= (x_{j1}^2, \dots, x_{j\eta}^2, x_{j\eta+1} \bar{x}_{j\eta+1}, \dots, x_{j\eta+\vartheta} \bar{x}_{j\eta+\vartheta}, x_{j\eta+\vartheta+1} \bar{x}_{j\eta+\vartheta+1}, \dots, x_{j\eta+\vartheta+\xi} \bar{x}_{j\eta+\vartheta+\xi}) \\ &= (x_{j1}^2, \dots, x_{j\eta}^2, |x_{j\eta+1}|^2, \dots, |x_{j\eta+\vartheta}|^2, |x_{j\eta+\vartheta+1}|^2, \dots, |x_{j\eta+\vartheta+\xi}|^2) \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^{\eta+\vartheta+\xi}. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir die Ungleichung  $\langle x, x \rangle_{\mathbb{A}} = x_k \bar{x}_k + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n x_j \bar{x}_j > 0$ .  $\square$

Da wir eingesehen haben, dass das Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{A}}$  nicht ausgeartet ist, können wir nun unsere gewünschten Hyperebenen im Raum  $(\mathbb{R}^m)^n$  der vollen Dimension  $m(n-1)$  durch das Skalarprodukt formal einführen. Außerdem sei daran erinnert, wozu wir das Produkt brauchen. Wie am Anfang dieses Kapitels erläutert, wollen wir uns auf bestimmte Richtungen, in die wir mit Hyperebenen durch den Einheitsball  $(\overline{B}_2(0, r_m))^n$  schneiden, einschränken, damit wir eine explizite Volumenformel aufstellen können. Dazu notieren wir das

**Lemma 1.18.** Seien  $m, n \in \mathbb{N}$  und  $\eta, \vartheta, \xi \in \mathbb{N}_0$  mit  $m = \eta + 2\vartheta + 4\xi$ . Setzen wir die Menge der Normalenvektoren

$$S_m^{n-1} := \left\{ a \in \mathbb{A}^n : \langle a, a \rangle_{\mathbb{A}} = 1_{\mathbb{A}} \text{ und } |a_{j1}| = \dots = |a_{j\eta+\vartheta+\xi}| \text{ für alle } j \in \mathbb{N}_{\leq n} \right\}$$

und die affine Hyperebene bzgl.  $\mathbb{A}$  senkrecht zu der Richtung  $a$

$$H_a^\tau := \left\{ x \in \mathbb{A}^n : \langle x, a \rangle_{\mathbb{A}} = \tau \right\}$$

für alle  $a \in S_m^{n-1}$  und  $\tau \in \mathbb{A}$ , so gelten für alle  $a \in S_m^{n-1}$  die folgenden Aussagen:

(i)  $\|a_l\|_2 = 1$  für alle  $l \in \mathbb{N}_{\leq \eta+\vartheta+\xi}$ ,

(ii)  $H_a^\tau = H_a^0 + \tau a$ ,

(iii)  $\dim_{\mathbb{R}}(H_a^0) = m(n-1)$ .

**Beweis.** Zu (i): Sei  $a \in S_m^{n-1}$ . Es gilt die Gleichung

$$\begin{aligned} \underbrace{(1, \dots, 1)}_{\eta+\vartheta+\xi\text{-mal}} &= 1_{\mathbb{A}} = \langle a, a \rangle_{\mathbb{A}} = \sum_{j=1}^n a_j \bar{a}_j = \sum_{j=1}^n (a_{j1} \bar{a}_{j1}, \dots, a_{j\eta+\vartheta+l} \bar{a}_{j\eta+\vartheta+l}) \\ &= \sum_{j=1}^n (|a_{j1}|^2, \dots, |a_{j\eta+\vartheta+l}|^2). \end{aligned}$$

Diese ist äquivalent zu der Aussage:  $1 = \sum_{j=1}^n a_{jl}^2 = \|a_l\|_2^2$  für alle  $l \in \mathbb{N}_{\leq \eta+\vartheta+\xi}$ .

Zu (ii): Seien  $a \in S_m^{n-1}$  und  $\tau \in \mathbb{A}$ .

" $\subseteq$ ": Sei  $y \in H_a^\tau$ . Setzen wir  $x := y - \tau a$ , so gilt die Gleichung

$$\langle x, a \rangle_{\mathbb{A}} = \langle y, a \rangle_{\mathbb{A}} - \langle \tau a, a \rangle_{\mathbb{A}} = \tau - \langle \tau a, a \rangle_{\mathbb{A}} = \tau - \sum_{j=1}^n \tau a_j \bar{a}_j = \tau - \tau \sum_{j=1}^n a_j \bar{a}_j = \tau - \tau \cdot 1_{\mathbb{A}} = 0.$$

Damit ist  $x \in H_a^0$ . Also gilt die Identität  $y = x - \tau a \in H_a^0 + \tau a$ .

" $\supseteq$ ": Sei  $y \in H_a^0 + \tau a$ . Es existiert ein  $x \in H_a^0$  mit  $y = x + \tau a$ . Es gilt

$$\langle y, a \rangle_{\mathbb{A}} = \langle x + \tau a, a \rangle_{\mathbb{A}} = \langle x, a \rangle_{\mathbb{A}} + \langle \tau a, a \rangle_{\mathbb{A}} = \tau \langle a, a \rangle_{\mathbb{A}} = \tau \cdot 1_{\mathbb{A}} = \tau.$$

Also ist  $y \in H_a^\tau$ .

Zu (iii): Sei  $a \in S_m^{n-1}$ . Dann existiert ein  $k \in \mathbb{N}_{\leq n}$  mit  $a_{kl} \neq 0$  für alle  $l \in \mathbb{N}_{\leq \eta+\vartheta+\xi}$ . Damit ist  $a_k$  sowie  $\bar{a}_k$  invertierbar und es gilt die Gleichung

$$\begin{aligned} H_a^0 &= \left\{ x \in \mathbb{A}^n : \langle x, a \rangle_{\mathbb{A}} = 0 \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{A}^n : \sum_{j=1}^n x_j \bar{a}_j = 0 \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{A}^n : -\sum_{j=2}^n x_j \bar{a}_j \bar{a}_k^{-1} = x_1 \right\}. \end{aligned}$$

Setzen wir  $T : \mathbb{A}^{n-1} \rightarrow H_a^0, x \mapsto \left( -\sum_{j=2}^n x_j \bar{a}_j \bar{a}_k^{-1}, x_2, \dots, x_n \right)$ , so ist  $T$  ein Vektorraumisomorphismus und es gilt die Identität:  $\dim_{\mathbb{R}}(H_a^0) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{A}^{n-1}) = m(n-1)$ .  $\square$

Im letzten technischen Lemma dieses Abschnitts, das wir im weiteren Verlauf der Arbeit brauchen werden, beweisen wir noch einige Eigenschaften, die die Hyperebene  $H_a^0$  besitzt. Weiterhin zeigen wir, auf welcher Menge die Hyperebene senkrecht steht.

**Lemma 1.19.** Seien  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $\eta, \vartheta, \xi \in \mathbb{N}_0$  mit  $m = \eta + 2\vartheta + 4\xi$ . Des Weiteren seien  $S_m^{n-1}$ ,  $H_a^0$  für alle  $a \in S_m^{n-1}$  definiert wie in Lemma 1.18 und  $a \in S_m^{n-1}$ . Wir betrachten für alle  $i \in \mathbb{N}_{\leq \eta}$ ,  $k \in \mathbb{N}_{\leq \vartheta}$ ,  $l \in \mathbb{N}_{\leq \xi}$  und  $j \in \mathbb{N}_{\leq n}$  die folgenden Elemente aus  $\mathbb{A}$

$$\begin{aligned} r_{ji} &:= \left( (0, \dots, 0, a_{ji}, 0, \dots, 0), (0, \dots, 0), (0, \dots, 0) \right), \\ c_{j\eta+k}^{(1)} &:= \left( (0, \dots, 0), (0, \dots, 0, a_{j\eta+k}^{(1)}, a_{j\eta+k}^{(2)}, 0, \dots, 0), (0, \dots, 0) \right), \\ c_{j\eta+k}^{(2)} &:= \left( (0, \dots, 0), (0, \dots, 0, -a_{j\eta+k}^{(2)}, a_{j\eta+k}^{(1)}, 0, \dots, 0), (0, \dots, 0) \right), \\ h_{j\eta+\vartheta+l}^{(1)} &:= \left( (0, \dots, 0), (0, \dots, 0), (0, \dots, 0, a_{j\eta+\vartheta+l}^{(1)}, a_{j\eta+\vartheta+l}^{(2)}, a_{j\eta+\vartheta+l}^{(3)}, a_{j\eta+\vartheta+l}^{(4)}, 0, \dots, 0) \right), \\ h_{j\eta+\vartheta+l}^{(2)} &:= \left( (0, \dots, 0), (0, \dots, 0), (0, \dots, 0, -a_{j\eta+\vartheta+l}^{(2)}, a_{j\eta+\vartheta+l}^{(1)}, -a_{j\eta+\vartheta+l}^{(4)}, a_{j\eta+\vartheta+l}^{(3)}, 0, \dots, 0) \right), \\ h_{j\eta+\vartheta+l}^{(3)} &:= \left( (0, \dots, 0), (0, \dots, 0), (0, \dots, 0, -a_{j\eta+\vartheta+l}^{(3)}, a_{j\eta+\vartheta+l}^{(4)}, a_{j\eta+\vartheta+l}^{(1)}, -a_{j\eta+\vartheta+l}^{(2)}, 0, \dots, 0) \right), \\ h_{j\eta+\vartheta+l}^{(4)} &:= \left( (0, \dots, 0), (0, \dots, 0), (0, \dots, 0, -a_{j\eta+\vartheta+l}^{(4)}, -a_{j\eta+\vartheta+l}^{(3)}, a_{j\eta+\vartheta+l}^{(2)}, a_{j\eta+\vartheta+l}^{(1)}, 0, \dots, 0) \right) \end{aligned}$$

und definieren die  $a$ -Basis durch

$$B_a := \left\{ \left( (r_{1i}, \dots, r_{ni}), \left( c_{1\eta+k}^{(r)}, \dots, c_{n\eta+k}^{(r)} \right), \left( h_{1\eta+\vartheta+l}^{(s)}, \dots, h_{n\eta+\vartheta+l}^{(s)} \right) \right) : i \in \mathbb{N}_{\leq \eta}, k \in \mathbb{N}_{\leq \vartheta}, l \in \mathbb{N}_{\leq \xi}, r \in \mathbb{N}_{\leq 2}, s \in \mathbb{N}_{\leq 4} \right\}.$$

Für den  $\mathbb{R}$ -Teilraum  $B_a^{\perp \mathbb{R}}$  von  $(\mathbb{R}^m)^n$  gelten die Aussagen

- (i)  $H_a^0 = B_a^{\perp \mathbb{R}}$ ,
- (ii)  $B_a$  ist eine Orthonormalbasis von  $\langle B_a \rangle_{\mathbb{R}}$ ,
- (iii)  $\|y_j\|_2 = |a_{j1}|$  für alle  $j \in \mathbb{N}_{\leq n}$  und  $y \in S^{mn-1} \cap \langle B_a \rangle_{\mathbb{R}}$ .

**Beweis.** Zu (i): Sei  $x \in \mathbb{A}^n$  mit  $\langle x, a \rangle_{\mathbb{A}} = 0_{\mathbb{A}} = 0_{\mathbb{R}^m}$ . Dies ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} \langle x, (r_{1i}, \dots, r_{ni}) \rangle_{\mathbb{R}} &= 0 \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}_{\leq \eta}, \\ \langle x, (c_{1\eta+k}^{(r)}, \dots, c_{n\eta+k}^{(r)}) \rangle_{\mathbb{R}} &= 0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_{\leq \vartheta}, r \in \mathbb{N}_{\leq 2} \text{ und} \\ \langle x, (h_{1\eta+\vartheta+l}^{(s)}, \dots, h_{n\eta+\vartheta+l}^{(s)}) \rangle_{\mathbb{R}} &= 0 \quad \text{für alle } l \in \mathbb{N}_{\leq \xi}, s \in \mathbb{N}_{\leq 4}. \end{aligned}$$

Also liegt  $x$  im Senkrechttraum von  $B_a$ .

Zu (ii): Offensichtlich ist  $B$  eine orthogonale Basis. Weiterhin gelten mit Lemma 1.18 (i) für alle  $i \in \mathbb{N}_{\leq \eta}$ ,  $k \in \mathbb{N}_{\leq \vartheta}$  und  $r \in \mathbb{N}_{\leq 2}$ ,  $l \in \mathbb{N}_{\leq \xi}$  und  $s \in \mathbb{N}_{\leq 4}$  die Identitäten

$$\begin{aligned} \|(r_{1i}, \dots, r_{ni})\|_2 &= \sum_{j=1}^n a_{ji}^2 = \|a_i\|_2 = 1, \\ \|(c_{1\eta+k}^{(r)}, \dots, c_{n\eta+k}^{(r)})\|_2 &= \sum_{t=1}^2 \sum_{j=1}^n \left( a_{j\eta+k}^{(t)} \right)^2 = \|a_{\eta+k}\|_2 = 1, \\ \|(h_{1\eta+\vartheta+l}^{(s)}, \dots, h_{n\eta+\vartheta+l}^{(s)})\|_2 &= \sum_{t=1}^4 \sum_{j=1}^n \left( a_{j\eta+\vartheta+l}^{(t)} \right)^2 = \|a_{\eta+\vartheta+l}\|_2 = 1. \end{aligned}$$

Zu (iii): Sei  $y \in S^{mn-1} \cap \langle B_a \rangle_{\mathbb{R}}$ . Es existieren

$$\begin{aligned} & (\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}_{\leq \eta}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_{\leq \eta}}, \left( \lambda_{\eta+k}^{(1)} \right)_{k \in \mathbb{N}_{\leq \vartheta}}, \left( \lambda_{\eta+k}^{(2)} \right)_{k \in \mathbb{N}_{\leq \vartheta}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_{\leq \vartheta}} \text{ und} \\ & \left( \lambda_{\eta+\vartheta+l}^{(1)} \right)_{l \in \mathbb{N}_{\leq \xi}}, \left( \lambda_{\eta+\vartheta+l}^{(2)} \right)_{l \in \mathbb{N}_{\leq \xi}}, \left( \lambda_{\eta+\vartheta+l}^{(3)} \right)_{l \in \mathbb{N}_{\leq \xi}}, \left( \lambda_{\eta+\vartheta+l}^{(4)} \right)_{l \in \mathbb{N}_{\leq \xi}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_{\leq \xi}} \text{ mit} \\ y &= \sum_{i=1}^{\eta} \lambda_i (r_{1i}, \dots, r_{ni}) + \sum_{r=1}^2 \sum_{k=1}^{\vartheta} \lambda_{\eta+k}^{(r)} \left( c_{1\eta+k}^{(r)}, \dots, c_{n\eta+k}^{(r)} \right) \\ & \quad + \sum_{s=1}^4 \sum_{l=1}^{\xi} \lambda_{\eta+\vartheta+k}^{(s)} \left( h_{1\eta+\vartheta+l}^{(s)}, \dots, h_{n\eta+\vartheta+l}^{(s)} \right). \end{aligned}$$

Damit und mit Lemma 1.18 ergibt sich für alle  $j \in \mathbb{N}_{\leq n}$

$$\begin{aligned} \|y_j\|_2^2 &= \sum_{i=1}^{\eta} \lambda_i^2 a_{ji}^2 + \sum_{r=1}^2 \sum_{k=1}^{\vartheta} \left( \lambda_{\eta+k}^{(r)} \right)^2 \left( a_{j\eta+k}^{(r)} \right)^2 + \sum_{s=1}^4 \sum_{l=1}^{\xi} \left( \lambda_{\eta+\vartheta+k}^{(s)} \right)^2 \left( a_{j\eta+\vartheta+l}^{(s)} \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\eta} \lambda_i^2 a_{ji}^2 + \sum_{k=1}^{\vartheta} \left( \sum_{r=1}^2 \left( \lambda_{\eta+k}^{(r)} \right)^2 \right) \left( \sum_{r=1}^2 \left( a_{j\eta+k}^{(r)} \right)^2 \right) \\ & \quad + \sum_{l=1}^{\xi} \left( \sum_{s=1}^4 \left( \lambda_{\eta+\vartheta+k}^{(s)} \right)^2 \right) \left( \sum_{s=1}^4 \left( a_{j\eta+\vartheta+l}^{(s)} \right)^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^{\eta} |\lambda_i|^2 |a_{ji}|^2 + \sum_{k=1}^{\vartheta} |\lambda_{\eta+k}|^2 |a_{j\eta+k}|^2 + \sum_{l=1}^{\xi} |\lambda_{\eta+\vartheta+k}|^2 |a_{j\eta+\vartheta+l}|^2 \\ &= \|\lambda\|_2^2 |a_{j1}|^2. \end{aligned}$$

Ingesamt folgt mit Lemma 1.18 die Gleichung:  $1 = \|y\|^2 = \|\lambda\|_2^2 \sum_{j=1}^n |a_{j1}|^2 = \|\lambda\|_2^2$ .  $\square$

## 1.3 Algebren-Multiplikation als Orthogonale Abbildung

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels wollen wir die gleichen Betrachtungen wie am Anfang dieses Kapitels für das Volumen vom Schnitt der normierten Einheitskugel  $(\overline{B}_2(0, r_m))^n$  mit der Hyperebene  $H_a^r$  für den Fall  $m \in \{1, 2\}$  vollziehen. Wir können jetzt durch das Skalarprodukt auf dem  $\mathbb{A}^n$  allgemein Hyperebenen im  $(\mathbb{R}^m)^n$  definieren, d. h. wir charakterisieren mit Hilfe von Vektoren aus  $S_m^{n-1}$  Hyperebenen aus dem  $(\mathbb{R}^m)^n$ . Wie schon in  $\mathbb{R}^1$  und  $\mathbb{R}^2$  werden wir uns auch im allgemeinen Fall auf gewisse Richtungen beschränken, die es uns erlauben eine explizite Volumenformel für Schnitten von Hyperebenen mit dem normierten Einheitsball  $(\overline{B}_2(0, r_m))^n$  angeben zu können. Bevor wir zu den speziellen Normalenvektoren kommen, halten wir die nachfolgende Definition fest.

**Definition und Bezeichnung 1.20.** Seien  $m, n \in \mathbb{N}$  und  $p \in (0, \infty]$ . Für den weiteren Verlauf dieser Arbeit identifizieren wir  $\mathbb{A}$  mit dem  $\mathbb{R}^m$ . Weiterhin definieren wir die folgenden Mengen

$$(i) \quad \mathcal{E} := \left\{ e_j = (0, \dots, 0, \underbrace{1_{\mathbb{A}}}_{j\text{-te Stelle}}, 0, \dots, 0) : j \in \mathbb{N}_{\leq n} \right\} \text{ die Basis von } (\mathbb{R}^m)^n,$$



(ii) für alle Normalenvektoren  $a \in S_m^{n-1}$  und  $\tau \in \mathbb{R}^m$  sei

$$(1.8) \quad S_p(a, \tau) := \begin{cases} \left\{ x \in (\overline{B}_2(0, r_m))^n : \langle x, a \rangle_{\mathbb{A}} = r_m \tau \right\}, & \text{für } p = \infty, \\ \left\{ x \in \overline{B}_{2,p}(0, 1) : \langle x, a \rangle_{\mathbb{A}} = \tau \right\}, & \text{für } p \neq \infty \end{cases}$$

der Schnitt der senkrecht zu  $a$  stehenden Hyperebene  $H_a^{r_m \tau}$  mit dem normierten Einheitswürfel  $(\overline{B}_2(0, r_m))^n$  für  $p = \infty$  bzw.  $H_a^\tau$  mit der Einheitskugel  $\overline{B}_{2,p}(0, 1)$  für  $p \neq \infty$  und

(iii) für alle  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  sei

$$(1.9) \quad Sl_p(a, t) := \begin{cases} \left\{ x \in (\overline{B}_2(0, r_m))^n : \|\langle x, a \rangle_{\mathbb{A}}\|_2 \leq r_m t \right\}, & \text{für } p = \infty, \\ \left\{ x \in \overline{B}_{2,p}(0, 1) : \|\langle x, a \rangle_{\mathbb{A}}\|_2 \leq t \right\}, & \text{für } p \neq \infty \end{cases}$$

die Schicht senkrecht zum Vektor  $a$  im normierten Einheitswürfel  $(\overline{B}_2(0, r_m))^n$  für  $n = \infty$  bzw. im Einheitswürfel  $\overline{B}_{2,p}(0, 1)$  für  $p \neq \infty$ .

Zusätzlich bezeichnen wir das  $m(n-1)$  - bzw.  $nm$  - dimensionale Volumen der Schnitte bzw. Schichten mit

$$A_p(a, \tau) := A_{p, m(n-1)}(a, \tau) := \text{vol}_{m(n-1)}(S_p(a, \tau)) \text{ für alle } \tau \in \mathbb{R}^m \text{ bzw.}$$

$$V_p(a, t) := V_{p, nm}(a, t) := \text{vol}_{nm}(Sl_p(a, t)) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

In den Fällen  $m = 1$  und  $m = 2$  konnten wir uns auf die Normalenrichtungen  $a \in S^{n-1}$  mit  $1 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n > 0$  einschränken. Unter anderem lieferte dies die Invarianz von  $A_\infty$ ,  $V_\infty$  und der Einheitskugel  $\overline{B}_2(0, r_m)$  unter orthogonalen Abbildungen. Genauso möchten wir für die anderen Fälle die Hyperebenen aus dem  $(\mathbb{R}^m)^n$  in unsere gewünschten Richtungen drehen, damit wir uns auf die eben erwähnten Normalenvektoren einschränken können. Dazu muss aber  $A_\infty$ ,  $V_\infty$  sowie die Kugel  $\overline{B}_2(0, r_m)$  invariant unter orthogonalen Abbildungen auf  $\mathbb{A}$  bleiben. Diese Tatsache notieren wir im

**Satz 1.21.** Seien  $m \in \mathbb{N}$  und  $\eta, \vartheta, \xi \in \mathbb{N}$  mit  $\eta + 2\vartheta + 4\xi = m$ . Für alle  $b \in \mathbb{A}$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) es existieren orthogonale Abbildung  $u \in O(\mathbb{A})$  und  $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  so, dass sich für alle  $x \in \mathbb{A}$  die Identität  $x\bar{b} = \lambda u(x)$  ergibt,
- (ii) es existiert ein  $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  so, dass sich für alle  $j \in \mathbb{N}_{\leq \eta + \vartheta + \xi}$  die Identität  $|b_j| = \lambda$  ergibt.

**Beweis.** (i) $\Rightarrow$ (ii): Wir wählen uns ein  $u \in O(\mathbb{A})$  und ein  $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit  $M_{\rho_{\bar{b}}} = \lambda M_u$ , wobei  $M_{\rho_{\bar{b}}} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{b}_{\eta + \vartheta + \xi} \end{pmatrix}$  bzw.  $M_u$  die Matrixdarstellung bzgl.  $\mathcal{E}$  der Abbildung

$\rho_{\bar{b}} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}, x \mapsto x\bar{b}$  bzw.  $u$  sei. Falls  $\lambda = 0$  ist, so ist  $b = 0$ . Sei also  $b \neq 0$ . Dann ist  $\lambda^{-1}M_{\rho_{\bar{b}}} \in O(\mathbb{A})$ . Das liefert uns die Gleichung

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} &= \lambda^{-2} M_{\rho_{\bar{b}}} \overline{M}_{\rho_{\bar{b}}} \\ &= \lambda^{-2} \begin{pmatrix} \bar{b}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{b}_{\eta+\vartheta+\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{\eta+\vartheta+\xi} \end{pmatrix} \\ &= \lambda^{-2} \begin{pmatrix} |b_1|^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & |b_{\eta+\vartheta+\xi}|^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dazu ist die Aussage  $|b_j| = \lambda$  für alle  $j \in \mathbb{N}_{\leq \eta+\vartheta+\xi}$  äquivalent.

(ii)⇒(i): Wir wählen uns ein  $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  so, dass die Identität  $|b_j| = \lambda$  für alle  $j \in \mathbb{N}_{\leq \eta+\vartheta+\xi}$  gilt. Falls  $\lambda = 0$  ist, erhalten wir die Behauptung. Sei also  $\lambda \neq 0$ . Betrachten wir die Abbildung  $u : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}, x \mapsto x\lambda^{-1}\bar{b}$ , so ist  $u \in O(\mathbb{A})$ .  $\square$

Der Satz 1.21 zeigt uns, von welchen Richtungen wir ausgehen müssen, damit die Invarianz von  $A_\infty$ ,  $V_\infty$  und  $\overline{B}_2(0, r_m)$  unter orthogonalen Abbildungen erhalten bleibt. Wenn wir also von der Menge der Normalenvektoren  $S_m^{n-1}$  ausgehen, können wir uns auch für den Fall  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  auf Normalenrichtungen vom Fall  $m = 1$  und  $m = 2$  einschränken. Diesen Sachverhalt beweisen wir jetzt endgültig im

**Korollar 1.22.** Für alle  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $a \in S_m^{n-1}$ ,  $\tau \in \mathbb{R}^m$  und  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  gelten die Aussagen:

- (i) falls  $\|\tau\|_2 > \sqrt{n}$  gilt, so ist die Menge  $S_\infty(a, \tau)$  leer,
- (ii) falls  $t \geq \sqrt{n}$  gilt, so ergibt sich die Identität  $Sl_\infty(a, t) = (\overline{B}_2(0, r_m))^n$  und
- (iii) falls  $b = (\|a_{\sigma(1)}\|_\infty \cdot 1_{\mathbb{A}}, \dots, \|a_{\sigma(n)}\|_\infty \cdot 1_{\mathbb{A}})$  mit  $1 \geq \|a_{\sigma(1)}\|_\infty \geq \dots \geq \|a_{\sigma(n)}\|_\infty \geq 0$  für eine passende Permutation  $\sigma \in S_n$  gilt, so erhalten wir die Gleichungen  $A_\infty(a, \tau) = A_\infty(b, \tau)$  und  $V_\infty(a, t) = V_\infty(b, t)$ .

**Beweis.** Seien  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $a \in S_m^{n-1}$ ,  $\tau \in \mathbb{R}^m$  und  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

Zu (i): Sei  $\|\tau\|_2 > \sqrt{n}$ . Da der normierte Einheitswürfel  $(\overline{B}_2(0, r_m))^n$  achsensymmetrisch und punktsymmetrisch zur Null im  $\mathbb{R}^{mn}$  ist, reicht es den Abstand des Vektors  $\underbrace{((r_m, 0, \dots, 0), \dots, (r_m, 0, \dots, 0))}_{n\text{-mal}}$  zur Null zu bestimmen. Es gilt die Gleichung

$$\left\| ((r_m, 0, \dots, 0), \dots, (r_m, 0, \dots, 0)) \right\|_2 = \left( \sum_{j=1}^n r_m^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n} r_m.$$

Zu (ii): Nach Definition von  $Sl_\infty(a, t)$  folgt (ii) aus (i).

Zu (iii): Seien  $\eta, \vartheta, \xi \in \mathbb{N}$  mit  $\eta + 2\vartheta + 4\xi = m$ . Falls es ein  $l \in \mathbb{N}_{\leq \eta+\vartheta+\xi}$  mit  $a_l = 0$  gibt, so sind  $A_{\infty, m(n-1)}(a, \tau) = A_{\infty, m(n-2)}(a_{(l)}, \tau)$  und  $V_{\infty, m(n-1)}(a, t) = V_{\infty, m(n-2)}(a_{(l)}, t)$ , wobei  $a_{(l)} := (a_1, \dots, a_{l-1}, a_{l+1}, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$  ist. Sei also ohne Einschränkung  $a_j \neq 0$  für alle  $j \in \mathbb{N}_{\leq n}$ . Damit sind für alle  $j \in \mathbb{N}_{\leq n}$  alle Komponenten von  $\bar{a}_j$  invertierbar. Insbesondere ist für alle  $j \in \mathbb{N}_{\leq n}$  die Komponente  $\bar{a}_j$  selbst invertierbar. Setzen wir für alle  $j \in \mathbb{N}_{\leq n}$  die

Abbildung  $u_j : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, x \mapsto x \|a_j\|_\infty \bar{a}_j^{-1}$ , so ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned}
A_\infty(a, \tau) &= \int_{\langle x, a \rangle_{\mathbb{A}} = r_m \tau} \chi_{\bar{B}_2(0, r_m)}(x_1) \cdot \dots \cdot \chi_{\bar{B}_2(0, r_m)}(x_n) dx_1 \dots dx_n \\
&\stackrel{(\text{Satz 1.21})}{=} \int_{\langle x, a \rangle_{\mathbb{A}} = r_m \tau} \chi_{\bar{B}_2(0, r_m)}(u_1^{-1}(x_1)) \cdot \dots \cdot \chi_{\bar{B}_2(0, r_m)}(u_n^{-1}(x_n)) dx_1 \dots dx_n \\
&= \int_{\sum_{j=1}^n u_j(y_j) \bar{a}_j = r_m \tau} \chi_{\bar{B}_2(0, r_m)}(y_1) \cdot \dots \cdot \chi_{\bar{B}_2(0, r_m)}(y_n) dy_1 \dots dy_n \\
&= \int_{\sum_{j=1}^n y_j \|a_j\|_\infty \cdot 1_{\mathbb{A}} = r_m \tau} \chi_{\bar{B}_2(0, r_m)}(y_1) \cdot \dots \cdot \chi_{\bar{B}_2(0, r_m)}(y_n) dy_1 \dots dy_n \\
&= \int_{\sum_{j=1}^n y_j \|a_{\sigma(j)}\|_\infty \cdot 1_{\mathbb{A}} = r_m \tau} \chi_{\bar{B}_2(0, r_m)}(y_1) \cdot \dots \cdot \chi_{\bar{B}_2(0, r_m)}(y_n) dy_1 \dots dy_n \\
&= A_\infty(b, \tau)
\end{aligned}$$

und die Gleichung

$$\begin{aligned}
V_\infty(a, t) &= \int_{(\mathbb{R}^m)^n} \chi_{\bar{B}_2(0, r_m)}(x_1) \cdot \dots \cdot \chi_{\bar{B}_2(0, r_m)}(x_n) \chi_{t\bar{B}_2(0, r_m)}\left(\sum_{j=1}^n x_j \bar{a}_j\right) dx_1 \dots dx_n \\
&\stackrel{(\text{Satz 1.21})}{=} \int_{(\mathbb{R}^m)^n} \chi_{\bar{B}_2(0, r_m)}(u_1^{-1}(x_1)) \cdot \dots \cdot \chi_{\bar{B}_2(0, r_m)}(u_n^{-1}(x_n)) \chi_{t\bar{B}_2(0, r_m)}\left(\sum_{j=1}^n x_j \bar{a}_j\right) dx_1 \dots dx_n \\
&= \int_{(\mathbb{R}^m)^n} \chi_{\bar{B}_2(0, r_m)}(y_1) \cdot \dots \cdot \chi_{\bar{B}_2(0, r_m)}(y_n) \chi_{t\bar{B}_2(0, r_m)}\left(\sum_{j=1}^n u_j(y_j) \bar{a}_j\right) dx_1 \dots dx_n \\
&= \int_{(\mathbb{R}^m)^n} \chi_{\bar{B}_2(0, r_m)}(y_1) \cdot \dots \cdot \chi_{\bar{B}_2(0, r_m)}(y_n) \chi_{t\bar{B}_2(0, r_m)}\left(\sum_{j=1}^n y_j \|a_j\|_\infty \cdot 1_{\mathbb{A}}\right) dx_1 \dots dx_n \\
&= V_\infty(b, t). \quad \square
\end{aligned}$$

Wir dürfen uns jetzt auf unsere gewünschten Normalenvektoren einschränken. Dies halten wir in der nächsten Bemerkung fest. Bevor wir dieses Kapitel abschließen, bemerken wir zusätzlich, dass sich die mengendefinierenden Bedingungen unserer  $S_\infty(a, \tau)$  und  $Sl_\infty(a, t)$  vereinfachen. Die Vereinfachung der Mengen ist deshalb so wichtig, weil wir im nächsten Kapitel dadurch eine explizite Volumenformel für Schnitte und Schichten angeben können.

**Bemerkung 1.23.** Seien  $m, n \in \mathbb{N}$ . Nach Lemma 1.18 (i) und Korollar 1.22 (iii) können wir ohne Einschränkung  $a \in \mathbb{R}^n$  mit  $1 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n > 0$  und  $\|a\|_2 = 1$  wählen. Damit ergeben sich mit (1.8) und (1.9) für alle  $\tau \in \mathbb{R}^m$  und  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  die Identitäten

$$S_\infty(a, \tau) = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in (\overline{B}_2(0, r_m))^n : \sum_{j=1}^n a_j x_j = r_m \tau \right\} \quad \text{und}$$

$$Sl_\infty(a, t) = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in (\overline{B}_2(0, r_m))^n : \left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j \right\|_2 \leq r_m t \right\}.$$

# Kapitel 2

## Volumenformeln für Schnitte und Schichten im verallgemeinerten Würfel

Ziel dieses Kapitels ist es, für die Volumina von  $A_\infty$  und  $V_\infty$  analytische Formeln so zu finden, dass wir mit ihnen im weiteren Verlauf einfacher rechnen können. Sie dienen weiterhin dazu  $A_\infty$  und  $V_\infty$  nach unten sowie nach oben abzuschätzen. Deshalb geben wir mit den Vorbetrachtungen, die wir im letzten Kapitel durchgeführt haben, geschlossene Ausdrücke für  $A_\infty$  und  $V_\infty$  an. Die ersten Formeln für  $A_\infty$  und  $V_\infty$  setzen sich aus spezifischen Funktionen zusammen, die wir an dieser Stelle definieren.

**Definition 2.1.** Seien  $\nu \in \mathbb{R}_{\geq -1}$  und  $J_\nu$  Besselfunktion von  $\nu$ -ter Ordnung (siehe Abb. 2.1). Wir definieren eine normierte Besselfunktion  $\nu$ -ter Ordnung durch

$$j_\nu : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}, s \mapsto 2^\nu \Gamma(\nu + 1) \frac{J_\nu(s)}{s^\nu}.$$

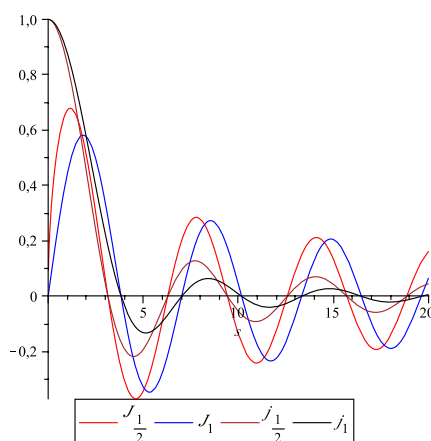


Abbildung 2.1: Besselfunktionen  $\frac{1}{2}$ -ter und 1-ter Ordnung sowie die zugehörigen Normierungen

Wie wir später sehen werden, wird in der ersten Formel für  $A_\infty$  und  $V_\infty$  über ein Produkt von  $j_\nu$  bezüglich des Maßes  $s^\alpha ds$  auf  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  für gewisse  $\nu \in \mathbb{Q}$  und  $\alpha \in \mathbb{N}$  integriert. Dazu klären wir in der nächsten Bemerkung zunächst, für welche  $\nu \in \mathbb{Q}$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}$  und für wie viele Faktoren von  $j_\nu$  das Integral überhaupt existiert.

**Bemerkung 2.2.** Seien  $l \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $\nu \in \mathbb{R}_{\geq -1}$  und  $b \in (\mathbb{R}_{>0})^l$ . Das Integral

$$\int_0^\infty \left( \prod_{j=1}^l j_\nu(b_j s) \right) s^\alpha ds$$

existiert genau dann, wenn die Ungleichung  $2\frac{\alpha+1}{l} < 2\nu + 1$  gilt.

**Beweis.** Für große  $s \in \mathbb{R}_{>0}$  gilt mit [1, 9.2.1] das asymptotische Verhalten

$$J_\nu(s) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos\left(s - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{s}}.$$

Es existieren  $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}_{>0}$  so, dass die folgende Abschätzung gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left( \prod_{j=1}^l j_\nu(b_j s) \right) s^\alpha ds &= (2^\nu \Gamma(\nu + 1))^l \int_0^\infty \left( \prod_{j=1}^l \frac{J_\nu(b_j s)}{(b_j s)^\nu} \right) s^\alpha ds \\ &\approx C_1 + C_2 \int_{C_3}^\infty \left( \prod_{j=1}^l \frac{\cos\left(b_j s - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)}{s^{\nu+\frac{1}{2}}} \right) s^\alpha ds \\ &= C_1 + C_2 \int_{C_3}^\infty \left( \prod_{j=1}^l \cos\left(b_j s - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) \right) s^{\alpha-l(\nu+\frac{1}{2})} ds. \end{aligned}$$

Das letzte Integral existiert genau dann, wenn die Ungleichung  $2\frac{\alpha+1}{l} < 2\nu + 1$  gilt.  $\square$

## 2.1 Analytische Volumenformeln

Pólya hat in [33, S. 204-212] für das Volumen von Schnitte durch den Würfel für den Fall  $m = 1$  die Formel

$$A_\infty(a, \tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left( \prod_{j=1}^n \frac{\sin(a_j s)}{a_j s} \right) \cos(\tau s) ds = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left( \prod_{j=1}^n j_{\frac{1}{2}}(a_j s) \right) j_{-\frac{1}{2}}(\tau s) ds$$

für alle  $\tau \in \mathbb{R}$  bewiesen. Für das Volumen von Schichten im Würfel lässt sich daraus die Formel

$$V_\infty(a, t) = \frac{2}{\pi} t \int_0^\infty \left( \prod_{j=1}^n \frac{\sin(a_j s)}{a_j s} \right) \frac{\sin(ts)}{ts} ds = \frac{2}{\pi} t \int_0^\infty \left( \prod_{j=1}^n j_1(a_j s) \right) j_1(ts) ds$$

für alle  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  ableiten. Für den Fall  $m = 2$  haben Oleszkiewicz und Pełczyński in [30, S.285] für das Volumen von Schnitten durch den Ursprung ( $\tau = 0$ ) die Formel

$$A_\infty(a, 0) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left( \prod_{j=1}^n j_1(a_j s) \right) s ds$$

herausgefunden. König und Koldobsky haben in [18, S. 3] die Formel auf ganz  $\mathbb{R}^2$  erweitert, d. h. sie haben die Identität

$$A_\infty(a, \tau) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left( \prod_{j=1}^n j_1(a_j s) \right) j_0(\|\tau\|_2 s) s \, ds$$

für alle  $\tau \in \mathbb{R}^2$  gezeigt. Zusätzlich bewiesen sie für alle  $t \in \mathbb{R}_{>0}$  für das Volumen für Schichten die Formel

$$V_\infty(a, t) = \frac{1}{2} t^2 \int_0^\infty \left( \prod_{j=1}^n j_1(a_j s) \right) j_1(ts) s \, ds.$$

Für den Beweis der Formel für  $A_\infty(a, \tau)$  benutzten sie die Fouriertransformation und ihre Umkehrformel. In den nächsten Schritten nutzen wir diese Idee und erweitern die Formel zur Berechnung des Volumens von Schnitten auf alle  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ . Die Volumenformel für Schichten beweisen wir für alle  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  mit einer neuen Idee.

Dieser Abschnitt beschäftigt sich also mit der Verallgemeinerung der Formeln. Sie sind für uns bei der Abschätzung von Schnitten durch den Ursprung  $A_\infty(\cdot, 0)$  nach oben von entscheidender Bedeutung.

**Satz 2.3** (Analytische Volumenformeln). *Seien  $m, n \in \mathbb{N}$  mit  $n \neq 1$  und  $a \in S^{n-1}$  mit  $1 > a_1 \geq \dots \geq a_n \geq 0$ . Es gilt für alle  $\tau \in \mathbb{R}^m$  die Volumenformel für Schnitte*

$$(2.1) \quad A_{\infty, m(n-1)}(a, \tau) = \frac{m}{2^m \left(\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right)\right)^2} \int_0^\infty \left( \prod_{j=1}^n j_{\frac{m}{2}}(a_j s) \right) j_{\frac{m}{2}-1}(\|\tau\|_2 s) s^{m-1} \, ds$$

und für alle  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  die Volumenformel für Schichten

$$(2.2) \quad V_{\infty, mn}(a, t) = \frac{m}{2^m \left(\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right)\right)^2} t^m \int_0^\infty \left( \prod_{j=1}^n j_{\frac{m}{2}}(a_j s) \right) j_{\frac{m}{2}}(ts) s^{m-1} \, ds.$$

**Beweis.** Sei  $\tau \in \mathbb{R}^m$ . Es gilt die Gleichung

$$A_\infty(a, \tau) = \int_{\sum_{j=1}^n a_j x_j = r_m \tau} \chi_{\overline{B}_2(0, r_m)}(x_1) \cdot \dots \cdot \chi_{\overline{B}_2(0, r_m)}(x_n) \, dx_1 \dots dx_n.$$

Mit dem Satz von Fubini und der Fourier-Transformation gilt für alle  $s \in \mathbb{R}^m$  die Identität

$$\begin{aligned} & \widehat{A_\infty}(a, s) \\ &= (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} A_\infty(a, \tau) e^{-i\langle \tau, s \rangle_{\mathbb{R}}} \, d\tau \\ &= (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\sum_{j=1}^n a_j x_j = r_m \tau} \chi_{\overline{B}_2(0, r_m)}(x_1) \cdot \dots \cdot \chi_{\overline{B}_2(0, r_m)}(x_n) \, dx_1 \dots dx_n e^{-i\langle \tau, s \rangle_{\mathbb{R}}} \, d\tau \\ &= (2\pi)^{-\frac{m}{2}} r_m^{-m} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^m} \dots \int_{\mathbb{R}^m}}_{n\text{-mal}} \chi_{\overline{B}_2(0, r_m)}(x_1) \cdot \dots \cdot \chi_{\overline{B}_2(0, r_m)}(x_n) e^{-ir_m^{-1} \left\langle \sum_{j=1}^n a_j x_j, s \right\rangle_{\mathbb{R}}} \, dx_1 \dots dx_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (2\pi)^{-\frac{m}{2}} r_m^{-m} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^m} \dots \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{\overline{B}_2(0, r_m)}(x_1) \cdot \dots \cdot \chi_{\overline{B}_2(0, r_m)}(x_n)}_{n\text{-mal}} e^{-i \sum_{j=1}^n \langle x_j, a_j s r_m^{-1} \rangle_{\mathbb{R}}} dx_1 \dots dx_n \\
&= (2\pi)^{-\frac{m}{2}} r_m^{-m} \left( \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{\overline{B}_2(0, r_m)}(x_j) e^{-i \langle x_j, a_j s r_m^{-1} \rangle_{\mathbb{R}}} dx_j \right) \\
&= (2\pi)^{\frac{m(n-1)}{2}} r_m^{-m} r_m^{nm} \left( \prod_{j=1}^n (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{\overline{B}_2(0, 1)}(x_j) e^{-i \langle x_j, a_j s \rangle_{\mathbb{R}}} dx_j \right) \\
&= (2\pi)^{\frac{m(n-1)}{2}} r_m^{m(n-1)} \left( \prod_{j=1}^n \widehat{\chi_{\overline{B}_2(0, 1)}}(a_j s) \right) \\
&\stackrel{[20, S. 344]}{=} (2\pi)^{\frac{m(n-1)}{2}} r_m^{m(n-1)} \left( \prod_{j=1}^n \frac{J_{\frac{m}{2}}(a_j \|s\|_2)}{(a_j \|s\|_2)^{\frac{m}{2}}} \right),
\end{aligned}$$

wobei  $\overline{B}_2(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\|_2 \leq 1\}$ . Es ergibt sich mit der Fourier-Umkehrformel und Bemerkung 2.2

$$\begin{aligned}
A_{\infty}(a, \tau) &= (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} \widehat{A_{\infty}}(a, s) e^{i \langle s, \tau \rangle_{\mathbb{R}}} ds \\
&= (2\pi)^{\frac{m(n-2)}{2}} r_m^{m(n-1)} \int_{\mathbb{R}^m} \left( \prod_{j=1}^n \frac{J_{\frac{m}{2}}(a_j \|s\|_2)}{(a_j \|s\|_2)^{\frac{m}{2}}} \right) e^{i \langle s, \tau \rangle_{\mathbb{R}}} ds.
\end{aligned}$$

Weiter folgt mit der Integration mittels Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}
&A_{\infty}(a, \tau) \\
&= (2\pi)^{\frac{m(n-2)}{2}} r_m^{m(n-1)} \underbrace{\int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \dots \int_0^{\pi}}_{(m-2)\text{-mal}} \left( \prod_{j=1}^n \frac{J_{\frac{m}{2}}(a_j r)}{(a_j r)^{\frac{m}{2}}} \right) \cos(r \|\tau\|_2 \cos(\varphi_{m-1})) \\
&\quad \cdot \sin^0(\varphi_1) \cdot \dots \cdot \sin^{m-2}(\varphi_{m-1}) r^{m-1} d\varphi dr \\
&= (2\pi)^{\frac{m(n-2)}{2}} r_m^{m(n-1)} \underbrace{\int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \dots \int_0^{\pi}}_{(m-3)\text{-mal}} \sin^0(\varphi_1) \cdot \dots \cdot \sin^{m-3}(\varphi_{m-2}) d\varphi_1 \dots d\varphi_{m-2} \\
&\quad \cdot \left( \prod_{j=1}^n \frac{J_{\frac{m}{2}}(a_j r)}{(a_j r)^{\frac{m}{2}}} \right) \int_0^{\pi} \cos(r \|\tau\|_2 \cos(\varphi_{m-1})) \sin^{m-2}(\varphi_{m-1}) d\varphi_{m-1} r^{m-1} dr \\
&= (2\pi)^{\frac{m(n-2)}{2}} r_m^{m(n-1)} (m-1) \kappa_{m-1} \int_0^{\infty} \left( \prod_{j=1}^n \frac{J_{\frac{m}{2}}(a_j r)}{(a_j r)^{\frac{m}{2}}} \right) \\
&\quad \cdot 2^{\frac{m}{2}-1} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right) \frac{J_{\frac{m-1}{2}}(r \|\tau\|_2)}{(r \|\tau\|_2)^{\frac{m}{2}-1}} r^{m-1} dr
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= (2\pi)^{\frac{m(n-2)}{2}} \kappa_m^{-n+1} (m-1) \kappa_{m-1} \frac{\Gamma(\frac{m-1}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})} \sqrt{\pi} \int_0^\infty \left( \prod_{j=1}^n \frac{J_{\frac{m}{2}}(a_j r)}{(a_j r)^{\frac{m}{2}}} \right) j_{\frac{m}{2}-1}(r \|\tau\|_2) r^{m-1} dr \\
 &= 2^{-m} (m-1) \frac{\Gamma(\frac{m-1}{2})}{\Gamma(\frac{m+1}{2}) \Gamma(\frac{m}{2}) \Gamma(\frac{m}{2}+1)} \int_0^\infty \left( \prod_{j=1}^n j_{\frac{m}{2}}(a_j r) \right) j_{\frac{m}{2}-1}(r \|\tau\|_2) r^{m-1} dr \\
 &= \frac{m}{2^m (\Gamma(\frac{m}{2}+1))^2} \int_0^\infty \left( \prod_{j=1}^n j_{\frac{m}{2}}(a_j r) \right) j_{\frac{m}{2}-1}(r \|\tau\|_2) r^{m-1} dr.
 \end{aligned}$$

Nun betrachten wir das Volumen der Schicht  $Sl_\infty(a, t)$ . Es gilt für alle  $t \in \mathbb{R}_{>0}$  die Identität

$$\begin{aligned}
 &V_\infty(a, t) \\
 &= \underbrace{\int_{\mathbb{R}^m} \cdots \int_{\mathbb{R}^m}}_{n\text{-mal}} \chi_{\overline{B}_2(0, r_m)}(x_1) \cdots \chi_{\overline{B}_2(0, r_m)}(x_n) \chi_{t\overline{B}_2(0, r_m)} \left( \sum_{j=1}^n a_j x_j \right) dx_1 \cdots dx_n \\
 &\stackrel{(y_i := \sum_{j=1}^i a_j x_j)}{=} \left( \prod_{j=1}^n a_j^{-m} \right) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^m} \cdots \int_{\mathbb{R}^m}}_{n\text{-mal}} \chi_{\overline{B}_2(0, r_m)} \left( \frac{y_1}{a_1} \right) \\
 &\quad \cdot \chi_{\overline{B}_2(0, r_m)} \left( \frac{y_2 - y_1}{a_2} \right) \cdots \chi_{\overline{B}_2(0, r_m)} \left( \frac{y_n - y_{n-1}}{a_n} \right) \chi_{t\overline{B}_2(0, r_m)}(y_n) dy_1 \cdots dy_n \\
 &= \left( \prod_{j=1}^n a_j^{-m} \right) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^m} \cdots \int_{\mathbb{R}^m}}_{n\text{-mal}} \chi_{a_1 \overline{B}_2(0, r_m)}(y_1) \\
 &\quad \cdot \chi_{a_2 \overline{B}_2(0, r_m)}(y_2 - y_1) \cdots \chi_{a_n \overline{B}_2(0, r_m)}(y_n - y_{n-1}) \chi_{t\overline{B}_2(0, r_m)}(y_n) dy_1 \cdots dy_n \\
 &= \left( \prod_{j=1}^n a_j^{-m} \right) \int_{\mathbb{R}^m} \left( \chi_{a_1 \overline{B}_2(0, r_m)} * \cdots * \chi_{a_n \overline{B}_2(0, r_m)} \right) (y_n) \chi_{t\overline{B}_2(0, r_m)}(y_n) dy_n \\
 &= \left( \prod_{j=1}^n a_j^{-m} \right) \left( \chi_{a_1 \overline{B}_2(0, r_m)} * \cdots * \chi_{a_n \overline{B}_2(0, r_m)} * \chi_{t\overline{B}_2(0, r_m)} \right) (0).
 \end{aligned}$$

Mit der Anwendung der Fourier-Umkehrformel an der Stelle 0 auf den letzten Ausdruck der Gleichung erhalten wir mit Bemerkung 2.2 die Identität

$$\begin{aligned}
 V_\infty(a, t) &= \left( \prod_{j=1}^n a_j^{-m} \right) (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} \left( \chi_{a_1 \overline{B}_2(0, r_m)} * \cdots * \widehat{\chi_{a_n \overline{B}_2(0, r_m)} * \chi_{t\overline{B}_2(0, r_m)}} \right) (z) dz \\
 &= \left( \prod_{j=1}^n a_j^{-m} \right) (2\pi)^{\frac{m(n-1)}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} \widehat{\chi_{a_1 \overline{B}_2(0, r_m)}}(z) \cdots \widehat{\chi_{a_n \overline{B}_2(0, r_m)}}(z) \widehat{\chi_{t\overline{B}_2(0, r_m)}}(z) dz.
 \end{aligned}$$

Weiter erhalten wir mit der Fourier-Tranformation für alle  $z \in \mathbb{R}^m$  und  $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$  die Gleichung

$$\begin{aligned}
\widehat{\chi_{\lambda \bar{B}_2(0, r_m)}}(z) &= (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{\lambda \bar{B}_2(0, r_m)}(x) e^{-i\langle z, x \rangle_{\mathbb{R}}} dx \\
&= (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{\lambda r_m \bar{B}_2(0, 1)}(x) e^{-i\langle z, x \rangle_{\mathbb{R}}} dx \\
&= (\lambda r_m)^m (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{\bar{B}_2(0, 1)}(x) e^{-i\langle z, \lambda r_m x \rangle_{\mathbb{R}}} dx \\
&= (\lambda r_m)^m (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{\bar{B}_2(0, 1)}(x) e^{-i\langle \lambda r_m z, x \rangle_{\mathbb{R}}} dx \\
&= (\lambda r_m)^m \widehat{\chi_{\bar{B}_2(0, 1)}}(\lambda r_m z) \\
&= (\lambda r_m)^m \frac{J_{\frac{m}{2}}(\lambda r_m \|z\|_2)}{(\lambda r_m \|z\|_2)^{\frac{m}{2}}}.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich die gewünschte Identität mit Hilfe von Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}
&V_{\infty}(a, t) \\
&= r_m^{m(n+1)} (2\pi)^{\frac{m}{2}(n-1)} t^m \int_{\mathbb{R}^m} \left( \prod_{j=1}^n \frac{J_{\frac{m}{2}}(a_j r_m \|z\|_2)}{(a_j r_m \|z\|_2)^{\frac{m}{2}}} \right) \frac{J_{\frac{m}{2}}(t r_m \|z\|_2)}{(t r_m \|z\|_2)^{\frac{m}{2}}} dz \\
&\stackrel{\text{(Polarkoordinaten)}}{=} r_m^{m(n+1)} (2\pi)^{\frac{m}{2}(n-1)} t^m m \kappa_m \int_0^{\infty} \left( \prod_{j=1}^n \frac{J_{\frac{m}{2}}(a_j r_m r)}{(a_j r_m r)^{\frac{m}{2}}} \right) \frac{J_{\frac{m}{2}}(t r_m r)}{(t r_m r)^{\frac{m}{2}}} r^{m-1} dr \\
&= r_m^{m(n+1)} (2\pi)^{\frac{m}{2}(n-1)} t^m m \kappa_m r_m^{-m} \int_0^{\infty} \left( \prod_{j=1}^n \frac{J_{\frac{m}{2}}(a_j s)}{(a_j s)^{\frac{m}{2}}} \right) \frac{J_{\frac{m}{2}}(t s)}{(t s)^{\frac{m}{2}}} s^{m-1} ds \\
&= \kappa^{-(n-1)} (2\pi)^{\frac{m}{2}(n-1)} m t^m \int_0^{\infty} \left( \prod_{j=1}^n \frac{J_{\frac{m}{2}}(a_j s)}{(a_j s)^{\frac{m}{2}}} \right) \frac{J_{\frac{m}{2}}(t s)}{(t s)^{\frac{m}{2}}} s^{m-1} ds \\
&= \left( \frac{\Gamma(\frac{m}{2} + 1)}{\pi^{\frac{m}{2}}} \right)^{n-1} (2\pi)^{\frac{m}{2}(n-1)} m t^m \int_0^{\infty} \left( \prod_{j=1}^n \frac{J_{\frac{m}{2}}(a_j s)}{(a_j s)^{\frac{m}{2}}} \right) \frac{J_{\frac{m}{2}}(t s)}{(t s)^{\frac{m}{2}}} s^{m-1} ds \\
&= \frac{m}{2^m \left( \Gamma(\frac{m}{2} + 1) \right)^2} t^m \int_0^{\infty} \left( \prod_{j=1}^n j_{\frac{m}{2}}(a_j s) \right) j_{\frac{m}{2}}(t s) s^{m-1} ds. \quad \square
\end{aligned}$$

## 2.2 Stochastische Volumenformeln

In diesem Abschnitt stellen wir weitere Formeln für das Volumen für Schichten  $V_\infty$  und das Volumen für Schnitte durch den Ursprung  $A_\infty(\cdot, 0)$  auf. Diese sind von stochastischer Natur und helfen uns bei der Berechnung der unteren Schranke für das Volumen für Schnitte durch den Ursprung  $A_\infty(\cdot, 0)$ . König und Koldobsky haben in [19, S. 2] für  $m \in \{1, 2\}$  die stochastische Volumenformel

$$V_\infty(a, t) = t^m \int_{\Omega} \left\| te + \sum_{j=1}^n a_j X_j(\omega) \right\|_2^{-m} dP(\omega)$$

für alle  $t \in \mathbb{R}_{>0}$  bewiesen, wobei  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum,  $X_1, \dots, X_n$  stochastisch unabhängige gleichverteilte Zufallsvariablen auf der Sphäre  $S^{m+1}$  und  $e \in S^{m+1}$  seien. Auch dieses Resultat beweisen wir im nachfolgenden Satz für alle  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ . Die stochastische Darstellung für  $V_\infty$  erhalten wir aus der Formel (2.2). Dies sehen wir in dem

**Satz 2.4** (Stochastische Volumenformel). *Seien  $m, n \in \mathbb{N}$  mit  $n \neq 1$ ,  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum,  $X_1, \dots, X_n$  stochastisch unabhängige gleichverteilte Zufallsvariablen auf der Sphäre  $S^{m+1}$  und  $e \in S^{m+1}$ . Weiter sei  $a \in S^{n-1}$  mit  $1 > a_1 \geq \dots \geq a_n > 0$ . Es gilt für alle  $t \in \mathbb{R}_{>0}$  die Volumenformel*

$$(2.3) \quad V_\infty(a, t) = t^m \int_{\Omega} \left\| te + \sum_{j=1}^n a_j X_j(\omega) \right\|_2^{-m} dP(\omega).$$

**Beweis.** Sei  $\lambda$  das Lebesgue-Maß auf  $S^{m+1}$  mit  $\lambda(S^{m+1}) = 1$ . Mit Hilfe der Polarkoordinatendarstellung ergibt sich für alle  $t \in \mathbb{R}$  und  $w \in S^{m+1}$  die Gleichung

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \int_{S^{m+1}} e^{it\langle u, w \rangle_{\mathbb{R}}} d\lambda(u) &= \frac{\int_0^\pi e^{it\|w\|_2 \cos(\varphi)} \sin^m(\varphi) d\varphi}{\int_0^\pi \sin^m(\varphi) d\varphi} \\ &= \frac{2^{\frac{m}{2}} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \frac{J_{\frac{m}{2}}(t\|w\|_2)}{(t\|w\|_2)^{\frac{m}{2}}}}{\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)}} \\ &= j_{\frac{m}{2}}(t). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für alle  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  und  $w \in S^{m+1}$  die Identität

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^n j_{\frac{m}{2}}(a_j s) &= \underbrace{\int_{S^{m+1}} \dots \int_{S^{m+1}}}_{n\text{-mal}} e^{ia_1 s \langle u_1, w \rangle_{\mathbb{R}}} \dots e^{ia_n s \langle u_n, w \rangle_{\mathbb{R}}} d\lambda(u_1) \dots d\lambda(u_n) \\ &= \int_{(S^{m+1})^n} e^{is \left\langle \sum_{j=1}^n a_j u_j, w \right\rangle_{\mathbb{R}}} d\lambda(u_1) \dots d\lambda(u_n). \end{aligned}$$

Da die letzte Gleichung unabhängig von der Wahl von  $w$  und  $\lambda$  rotationsinvariant ist, können wir über  $w$  integrieren und bekommen die Gleichung

$$\begin{aligned}
\left(\prod_{j=1}^n j_{\frac{m}{2}}(a_j s)\right) j_{\frac{m}{2}}(ts) &= \int_{(S^{m+1})^n} \int_{S^{m+1}} e^{is \left\langle \sum_{j=1}^n a_j u_j, w \right\rangle_{\mathbb{R}}} d\lambda(u_1) \dots d\lambda(u_n) e^{its \langle e, w \rangle_{\mathbb{R}}} d\lambda(w) \\
&= \int_{(S^{m+1})^n} \int_{S^{m+1}} e^{is \left\langle te + \sum_{j=1}^n a_j u_j, w \right\rangle_{\mathbb{R}}} d\lambda(w) d\lambda(u_1) \dots d\lambda(u_n) \\
&\stackrel{(2.4)}{=} \int_{(S^{m+1})^n} j_{\frac{m}{2}}\left(s \left\| te + \sum_{j=1}^n a_j u_j \right\|_2\right) d\lambda(u_1) \dots d\lambda(u_n).
\end{aligned}$$

Mit Fubini ergibt sich insgesamt die Volumenformel

$$\begin{aligned}
V_{\infty}(a, t) &\stackrel{(2.2)}{=} \frac{m}{2^m (\Gamma(\frac{m}{2} + 1))^2} t^m \int_0^{\infty} \left(\prod_{j=1}^n j_{\frac{m}{2}}(a_j s)\right) j_{\frac{m}{2}}(ts) s^{m-1} ds \\
&= \frac{m}{2^m (\Gamma(\frac{m}{2} + 1))^2} t^m \int_0^{\infty} \int_{(S^{m+1})^n} j_{\frac{m}{2}}\left(s \left\| te + \sum_{j=1}^n a_j u_j \right\|_2\right) d\lambda(u_1) \dots d\lambda(u_n) s^{m-1} ds \\
&= \frac{m}{2^m (\Gamma(\frac{m}{2} + 1))^2} t^m \int_0^{\infty} j_{\frac{m}{2}}(r) r^{m-1} dr \int_{(S^{m+1})^n} \frac{d\lambda(u_1) \dots d\lambda(u_n)}{\left\| te + \sum_{j=1}^n a_j u_j \right\|_2^m} \\
&= \frac{m}{2^m (\Gamma(\frac{m}{2} + 1))^2} t^m 2^{m-1} \Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \int_{(S^{m+1})^n} \frac{d\lambda(u_1) \dots d\lambda(u_n)}{\left\| te + \sum_{j=1}^n a_j u_j \right\|_2^m} \\
&= t^m \int_{(S^{m+1})^n} \frac{d\lambda(u_1) \dots d\lambda(u_n)}{\left\| te + \sum_{j=1}^n a_j u_j \right\|_2^m}. \quad \square
\end{aligned}$$

Die stochastische Volumenformel liefert uns im Grenzübergang  $t \rightarrow 0$  eine stochastische Formel für das Volumen von Schnitten durch den Ursprung. Diese Volumenformel werden wir im nächsten Kapitel für alle Normalenvektoren, auf die wir uns beschränkt haben, nach unten abschätzen. Dazu folgern wir das

**Korollar 2.5.** Seien  $m, n \in \mathbb{N}$  mit  $n \neq 1$ ,  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum,  $X_1, \dots, X_n$  stochastisch unabhängige gleichverteilte Zufallsvariablen auf der Sphäre  $S^{m+1}$ . Weiter sei  $a \in S^{n-1}$  mit  $1 > a_1 \geq \dots \geq a_n > 0$ . Es gilt die folgende stochastische Volumenformel für Schnitte durch den Ursprung:

$$(2.5) \quad A_{\infty}(a, 0) = \int_{\Omega} \left\| \sum_{j=1}^n a_j X_j(\omega) \right\|_2^{-m} dP(\omega).$$

**Beweis.** Für alle  $e \in S^{m+1}$  und  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  ergibt sich die Ungleichung

$$\begin{aligned}
 2 \left\| \sum_{j=1}^n a_j X_j(\omega) \right\|_2 &= \left\| te + \sum_{j=1}^n a_j X_j(\omega) - te + \sum_{j=1}^n a_j X_j(\omega) \right\|_2 \\
 &\stackrel{(\Delta\text{-Ungl.})}{\leq} \left\| te + \sum_{j=1}^n a_j X_j(\omega) \right\|_2 + \left\| te - \sum_{j=1}^n a_j X_j(\omega) \right\|_2 \\
 &= 2 \left\| te + \sum_{j=1}^n a_j X_j(\omega) \right\|_2.
 \end{aligned}$$

Mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz erhalten wir die Identität

$$\begin{aligned}
 A_\infty(a, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{V_\infty(a, t)}{t^m} \right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left\| te + \sum_{j=1}^n a_j X_j(\omega) \right\|_2^{-m} dP(\omega) \\
 &= \int_{\Omega} \left\| \sum_{j=1}^n a_j X_j(\omega) \right\|_2^{-m} dP(\omega).
 \end{aligned}$$

□

## Kapitel 3

# Untere und obere Schranke für Schnitte im verallgemeinerten Würfel

In diesem Kapitel geht es um die Abschätzung der Volumenformel  $A_\infty$  aus Kapitel zwei. Wir wollen für diese eine möglichst optimale untere und obere Schranke finden. Bestenfalls erhalten wir sogar die minimalen und maximalen Richtungen. Dabei legen wir den Schwerpunkt auf Schnitte durch den Ursprung, d. h. auf die Abbildung  $A_\infty(\cdot, 0)$ . Im Verlauf der Betrachtungen werden sich bestimmte Normalenvektoren als minimal und maximal herauskristallisieren. Diese Normalen fixieren wir in der

**Definition 3.1.** Für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $k \in \mathbb{N}_{\leq n}$  definieren wir den Normalenvektor

$$v_k := \underbrace{\left( \frac{1}{\sqrt{k}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{k}} \right)}_{k\text{-mal}}, 0, \dots, 0 \in \mathbb{R}^n.$$

Für den Fall  $m = 1$  wurde schon für Schnitte durch den Ursprung die untere und obere Schranke entdeckt. Beide Schranken sind optimal gewählt worden. Es ergab sich die Ungleichung

$$(3.1) \quad 1 \leq A_{\infty, n-1}(a, 0) \leq \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}.$$

Dabei wird die untere Schranke senkrecht zu  $v_1$  und die obere Schranke senkrecht zu  $v_2$  angenommen. Abbildung 3.1 zeigt uns den minimalen und maximalen Schnitt durch den Ursprung für den Fall  $n = 3$ .

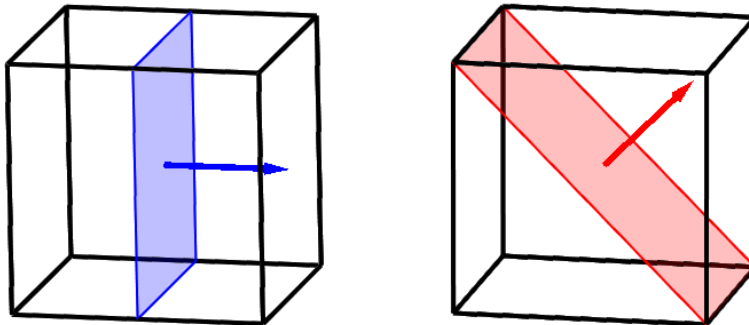


Abbildung 3.1: ■  $S_\infty(v_1, 0)$  und ■  $S_\infty(v_2, 0)$

Der erste Beweis für die untere Schranke wurde von Hadwiger in [13, S. 410-418] gegeben. Weitere erbrachten Vaaler in [34, S. 543-553], Hensley in [14, S. 95-100] und Ball in [3, S. 465-473]. Den Beweis für die obere Schranke lieferte Ball in [3, S. 465-473].

Oleszkiewicz und Pełczyński verallgemeinerten in [30, S. 281-294] das Ergebnis von Ball und erhielten für den Fall  $m = 2$  die Ungleichung

$$(3.2) \quad 1 \leq A_{\infty, 2(n-1)}(a, 0) \leq 2 = 2^{\frac{2}{2}}.$$

Die Schranken werden auch hier senkrecht zu den Richtungen  $v_1$  und  $v_2$  angenommen. Nun könnten wir vermuten, dass die Ungleichung

$$1 \leq A_{\infty, m(n-1)}(a, 0) \leq 2^{\frac{m}{2}}$$

für alle  $m \in \mathbb{N}$  gilt. Dies stimmt auch für die untere Schranke. Die obere ist aber nur eine Schranke für gewisse Normalen. Um alle Richtungen abzuschätzen, benötigen wir eine andere, größere obere Schranke.

Wir halten erst einmal fest, dass für den Fall, dass  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  ist, die untere Schranke genauso wie in den anderen beiden Fällen senkrecht zu der Richtung  $v_1$  angenommen wird. Die obere Schranke hingegen vergrößert sich und ändert sogar ihre Richtung in der sie angenommen wird. Ziel der nächsten Schritt wird es sein, die Ungleichung

$$(3.3) \quad 1 \leq A_{\infty, m(n-1)}(a, 0) \leq \frac{(2m+4)^{\frac{m}{2}}}{m 2^{m-1} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} A_{\infty, m(n-1)}(v_n, 0)$$

zu zeigen. Studieren wir die Ungleichung (3.3) genauer, so erkennen wir, dass die maximale Normalenrichtung ab einem  $n \in \mathbb{N}$  nicht mehr  $v_2$  ist. Vermutlich wird es der Normalenvektor  $v_n$  sein. Das wäre dann der Schnitt, der in Abbildung 3.2 für  $m = 1$  und  $n = 3$  illustriert wird. Diesen müssen wir uns natürlich in einer höheren Dimension bzgl.  $m$  vorstellen.

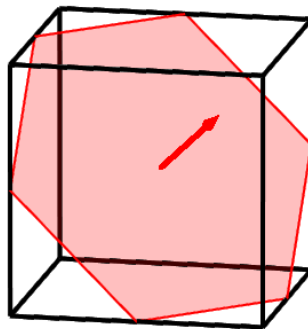


Abbildung 3.2: ■  $S_{\infty}(v_3, 0)$

### 3.1 Untere Schranke für Schnitte durch den Ursprung

Hensley benutzte im Falle  $m = 1$  als erster wahrscheinlichkeitstheoretische Methoden im Beweis der Behauptung, dass die untere Schranke für Schnitte durch den Ursprung gleich 1 ist. Diese Idee griffen König und Koldobsky in [18, S. 6] auf und zeigten die Behauptung zusätzlich für den Fall  $m = 2$ . Es liegt nahe, die Idee von König und Koldobsky für alle weiteren  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  zu verfolgen. Diese Ideen werden wir in diesem Abschnitt im folgenden Satz konkretisieren.

**Satz 3.2** (Hauptsatz). *Das Minimum aller Schnitte durch den Ursprung ist gleich 1, d. h. wir erhalten für alle  $m, n \in \mathbb{N}$  und  $a \in S^{n-1}$  mit  $1 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n \geq 0$  die Ungleichung*

$$(3.4) \quad 1 = A_{\infty, m(n-1)}(v_1, 0) \leq A_{\infty, m(n-1)}(a, 0).$$

**Beweis.** Seien  $m, n \in \mathbb{N}$  und  $a \in S^{n-1}$  mit  $1 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n \geq 0$ . Für den ersten Teil der Behauptung gilt die Identität

$$\begin{aligned} A_{\infty}(v_1, 0) &= \text{vol}_{m(n-1)} \left( H_{v_1}^0 \cap (\overline{B}_2(0, r_m))^n \right) \\ &= \text{vol}_{m(n-1)} \left( \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in (\overline{B}_2(0, r_m))^n : x_1 = 0 \right\} \right) \\ &= \text{vol}_{m(n-1)} \left( (\overline{B}_2(0, r_m))^{n-1} \right) \\ &= \left( \text{vol}_m (\overline{B}_2(0, r_m)) \right)^{n-1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Für den zweiten Teil der Behauptung seien der Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  und die stochastisch unabhängigen gleichverteilten Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  auf der Sphäre  $S^{m+1}$  gegeben. Definieren wir die Abbildung  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \omega \mapsto \left\| \sum_{j=1}^n a_j X_j(\omega) \right\|_2$ , so ergibt sich mit der Hölder-Ungleichung die Abschätzung

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{\Omega} dP(\omega) \\ &= \int_{\Omega} (f(\omega))^{\frac{2m}{m+2}} (f(\omega))^{-\frac{2m}{m+2}} dP(\omega) \\ &\leq \left( \int_{\Omega} (f(\omega))^{\frac{2m}{m+2} \frac{m+2}{m}} dP(\omega) \right)^{\frac{m}{m+2}} \left( \int_{\Omega} (f(\omega))^{-\frac{2m}{m+2} \frac{m+2}{2}} dP(\omega) \right)^{\frac{2}{m+2}} \\ &= \left( \int_{\Omega} (f(\omega))^2 dP(\omega) \right)^{\frac{m}{m+2}} \left( \int_{\Omega} (f(\omega))^{-m} dP(\omega) \right)^{\frac{2}{m+2}}. \end{aligned}$$

Diese Ungleichung ist äquivalent zu der folgenden:

$$\left( \int_{\Omega} (f(\omega))^2 dP(\omega) \right)^{-\frac{m}{2}} \leq \int_{\Omega} (f(\omega))^{-m} dP(\omega).$$

Daraus ergibt sich unsere behauptete Ungleichung

$$1 = \|a\|_2^{-m} = \left( \int_{\Omega} (f(\omega))^2 dP(\omega) \right)^{-\frac{m}{2}} \leq \int_{\Omega} (f(\omega))^{-m} dP(\omega) \stackrel{(2.5)}{=} A(a, 0). \quad \square$$



## 3.2 Obere Schranke für Schnitte durch den Ursprung

Wie am Anfang dieses Kapitels erläutert wurde, ist die Zahl  $2^{\frac{m}{2}}$  für gewisse Normalenvektoren eine obere Schranke. Diese Zahl beschränkt all diejenigen Normalenvektoren  $a \in S^{n-1}$  mit  $1 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n \geq 0$ , für die die erste Komponente  $a_1$  echt größer als  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  ist. Diesen Sachverhalt klären wir im nächsten Satz. Den Beweis, den wir dafür führen werden, ist eine Verallgemeinerung des Beweises von Oleszkiewicz und Pełczyński in [30, S. 286].

**Satz 3.3.** *Für alle  $m, n \in \mathbb{N}$  und  $a \in S^{n-1}$  mit  $1 \geq a_1 > \frac{1}{\sqrt{2}} \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$  gilt die Ungleichung*

$$(3.5) \quad A_{\infty, m(n-1)}(a, 0) \leq A_{\infty, m(n-1)}(v_2, 0) = 2^{\frac{m}{2}}.$$

**Beweis.** Seien  $m, n \in \mathbb{N}$  und  $a \in S^{n-1}$  mit  $1 \geq a_1 > \frac{1}{\sqrt{2}} \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$ . Für den ersten Teil der Behauptung gilt die Identität

$$\begin{aligned} A_{\infty}(v_2, 0) &\stackrel{(2.1)}{=} \frac{m}{2^m (\Gamma(\frac{m}{2} + 1))^2} \int_0^{\infty} \left( j_{\frac{m}{2}}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) \right)^2 s^{m-1} ds \\ &= \frac{m}{2^{\frac{m}{2}} (\Gamma(\frac{m}{2} + 1))^2} \int_0^{\infty} (j_{\frac{m}{2}}(s))^2 s^{m-1} ds \\ &= 2^{\frac{m}{2}} m \int_0^{\infty} \frac{(J_{\frac{m}{2}}(s))^2}{s} ds \\ &\stackrel{[11, 6.574]}{=} 2^{\frac{m}{2}}. \end{aligned}$$

Für den zweiten Teil der Behauptung setzen wir  $b_j := (a_j, \dots, a_j)$  für alle  $j \in \mathbb{N}_{\leq n}$  und betrachten den Zylinder  $Z_m^n := \mathbb{R}^m \times (\overline{B}_2(0, r_m))^{n-1}$  (siehe Abb. 3.3).

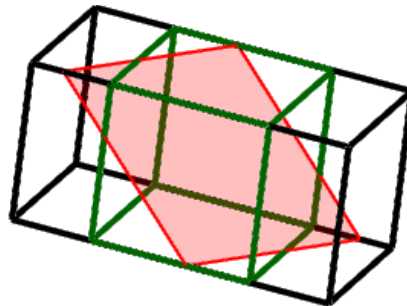


Abbildung 3.3: ■  $Z_m^n \cap H_b^0$  und ■  $(\overline{B}_2(0, r_m))^n$

Offensichtlich ist  $(\overline{B}_2(0, r_m))^n \subseteq Z_m^n$ . Demnach ist auch  $S_{\infty}(b, t) \subseteq Z_m^n \cap H_b^0$  und damit gilt die Ungleichung

$$(3.6) \quad A_{\infty, m(n-1)}(b, 0) \leq \text{vol}_{m(n-1)}(Z_m^n \cap H_b^0).$$

Für den weiteren Verlauf des Beweises definieren wir die Abbildung

$$T : \underbrace{\mathbb{R}^m \cdot b + H_b^0}_{=(\mathbb{R}^m)^n} \rightarrow \underbrace{\mathbb{R}^m \cdot \hat{e}_1 + H_{\hat{e}_1}^0}_{=(\mathbb{R}^m)^n}, z \cdot b + h \mapsto z \cdot \hat{e}_1 + P(h),$$

wobei  $\hat{e}_1 \in \mathcal{E}$  (siehe Definition 1.20) und  $P$  die Projektion von  $H_b^0$  auf  $H_{\hat{e}_1}^0$  ist (siehe Abb. 3.4).  
Damit gilt für alle  $x \in (\mathbb{R}^m)^n$  die Identität

$$P(x - \langle x, b \rangle_{\mathbb{A}} \cdot b) = (0_{\mathbb{A}}, x_2 - \langle x, b \rangle_{\mathbb{A}} \cdot b_2, \dots, x_n - \langle x, b \rangle_{\mathbb{A}} \cdot b_n).$$

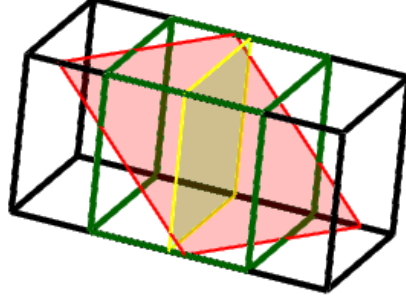


Abbildung 3.4: ■  $Z_m^n \cap H_b^0$ , ■  $Z_m^n \cap H_{\hat{e}_1}^0$  und ■  $(\overline{B}_2(0, r_m))^n$

Wir erhalten die folgende Matrixdarstellung von  $T$  bzgl. der Basis  $\mathcal{E}$  im Raum  $\mathbb{A}^n$ :

$$M_T = \begin{pmatrix} b_1 & -b_1 b_2 & -b_1 b_3 & \dots & -b_1 b_n \\ b_2 & 1_{\mathbb{A}} - b_2^2 & -b_2 b_3 & \dots & -b_2 b_n \\ b_3 & -b_3 b_2 & 1_{\mathbb{A}} - b_3^2 & \dots & -b_3 b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & -b_n b_2 & -b_n b_3 & \dots & 1_{\mathbb{A}} - b_n^2 \end{pmatrix}.$$

Sei  $\tilde{T} : \mathbb{R}^{mn} \rightarrow \mathbb{R}^{mn}$  die durch  $T$  induzierte Funktion und sei  $M_{\tilde{T}}$  die zu  $\tilde{T}$  zugehörige Matrix. Dann ist die Matrixdarstellung bzgl. der Standardbasis des  $\mathbb{R}^{mn}$  das folgende Tensorprodukt:

$$M_{\tilde{T}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & -a_1 a_2 & -a_1 a_3 & \dots & -a_1 a_n \\ a_2 & 1 - a_2^2 & -a_2 a_3 & \dots & -a_2 a_n \\ a_3 & -a_3 a_2 & 1 - a_3^2 & \dots & -a_3 a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & -a_n a_2 & -a_n a_3 & \dots & 1 - a_n^2 \end{pmatrix}}_{=: A_T} \otimes I_{\mathbb{R}^m}.$$

Daraus folgt die Ungleichung

$$\det(M_{\tilde{T}}) = \det(A_T \otimes I_{\mathbb{R}^m}) = (\det(A_T))^m (\det(I_{\mathbb{R}^m}))^n = a_1^m > 2^{-\frac{m}{2}}.$$

Mit der Transformationsformel erhalten wir damit für alle messbaren Mengen  $B \subseteq (\mathbb{R}^m)^n$  die Identität

$$\text{vol}_{mn}(B) = a_1^{-m} \text{vol}_{mn}(T(B)).$$

Setzen wir die Menge  $B_\varepsilon := \bigcup_{z \in B_2(0, \varepsilon)} (z \cdot b + (Z_m^n \cap H_b^0))$  für alle  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ , so ergibt sich die Gleichung

$$\text{vol}_{m(n-1)}(Z_m^n \cap H_b^0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( (\varepsilon^m \kappa_m)^{-1} \text{vol}_{mn}(B_\varepsilon) \right).$$

Da  $T(Z_m^n \cap H_b^0)$  orthogonal zu  $\hat{e}_1 = T(b)$  ist, erhalten wir die Identitäten

$$T(B_\varepsilon) = \bigcup_{z \in B_2(0, \varepsilon)} (z \cdot \hat{e}_1 + T(Z_m^n \cap H_b^0)) \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} \text{vol}_{m(n-1)}(T(Z_m^n \cap H_b^0)) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( (\varepsilon^m \kappa_m)^{-1} \text{vol}_{mn}(T(B_\varepsilon)) \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( (\varepsilon^m \kappa_m)^{-1} a_1^m \text{vol}_{mn}(B_\varepsilon) \right) \\ &= a_1^m \text{vol}_{m(n-1)}(Z_m^n \cap H_b^0). \end{aligned}$$

(3.7)

Aus der Gleichung  $\text{vol}_{m(n-1)}(T(Z_m^n \cap H_b^0)) = \text{vol}_{m(n-1)}((\overline{B}_2(0, r_m))^{n-1}) = 1$  folgt mit Ungleichung (3.6) und Identität (3.7) die Ungleichung

$$\begin{aligned} A_{\infty, m(n-1)}(a, 0) &\stackrel{\text{(Bemerkung 1.23)}}{=} A_{\infty, m(n-1)}(b, 0) \\ &\leq \text{vol}_{m(n-1)}(Z_m^n \cap H_b^0) \\ &= a_1^{-m} \text{vol}_{m(n-1)}(T(Z_m^n \cap H_b^0)) \\ &= a_1^{-m} \\ &\leq 2^{\frac{m}{2}}. \end{aligned} \quad \square$$

Im zweiten Teil dieses Abschnitts wollen wir die Abschätzung

$$A_{\infty, m(n-1)}(a, 0) \leq \frac{(2m+4)^{\frac{m}{2}}}{m 2^{m-1} \Gamma(\frac{m}{2})} = \lim_{n \rightarrow \infty} A_{\infty, m(n-1)}(v_n, 0)$$

für alle  $a_1 \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  zeigen. Im Beweis dieser Abschätzung geht entscheidend die Hölder-Ungleichung sowie die Abschätzung der Funktion  $f_m$ , die wegen ihrer außerordentlichen Relevanz für den weiteren Verlauf dieses Kapitels in der folgenden Definition notiert wird, ein.

**Definition 3.4.** Für alle  $m \in \mathbb{N}$  setzen wir die Abbildung

$$(3.8) \quad f_m : \mathbb{R}_{> \frac{2m}{m+1}} \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto p^{\frac{m}{2}} \int_0^\infty |j_{\frac{m}{2}}(s)|^p s^{m-1} ds.$$

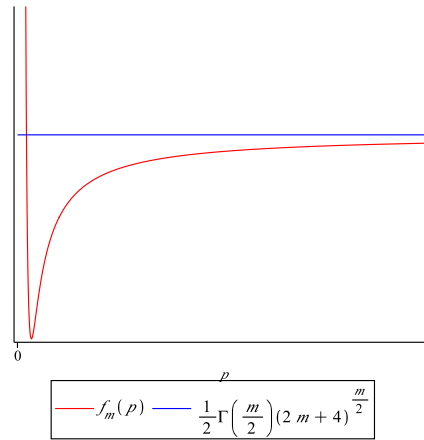


Abbildung 3.5: asymptotischer Verlauf von  $f_m$

Wie in Abbildung 3.5 skizziert wird, werden wir die Ungleichung

$$(3.9) \quad f_m \leq \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) (2m+4)^{\frac{m}{2}}$$

ab einem bestimmten  $p_0 \in \mathbb{R}_{> \frac{2m}{m+1}}$  zeigen.

Zunächst beweisen wir mit der Methode aus [28, S. 3] von Nazarov und Podkorytov die Abschätzung (3.9) für den Fall  $m = 1$ . Für den Fall, dass  $2 \leq m \leq 5$  ist, zeigen wir die Ungleichung (3.9) ähnlich, wie Oleszkiewicz und Pełczyński es für den Fall  $m = 2$  in [30, S. 282] taten. Für den Beweis der Ungleichung für alle weiteren  $m \in \mathbb{N}$  modifizieren wir die Beweisideen von Nazarov und Podkorytov. All diese Beweise benötigen das

**Lemma 3.5.** Setzen wir  $t_m := \frac{m}{2} + 3$  für alle  $m \geq 2$ ,  $t_1 := 3.38$  und  $t_0 := 2.59$ , so gilt für alle  $s \in [0, t_m]$  die Abschätzung

$$(3.10) \quad \left| j_{\frac{m}{2}}(s) \right| \leq e^{-\frac{s^2}{2m+4} - \frac{s^4}{4(m+2)^2(m+4)}}.$$

Setzen wir  $s_m := \frac{m}{2}$  für alle  $m \geq 6$ ,  $s_m := \sqrt{\frac{m}{2} \left( \frac{m}{2} + 2 \right)}$  für alle  $5 \geq m \geq 2$  und  $s_1 := 1$ , so gilt für alle  $s \in [0, s_m]$  die Abschätzung

$$(3.11) \quad e^{-\frac{s^2}{2m+4} - s^4} \leq \left| j_{\frac{m}{2}}(s) \right|.$$

**Beweis.** Sei  $\nu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Nach [35, S. 45 und 46] erfüllen Besselfunktionen  $\nu$ -ter Ordnung die Gleichungen

$$(3.12) \quad J_{\nu-1}(s) + J_{\nu+1}(s) = 2\nu \frac{J_{\nu}(s)}{s},$$

$$(3.13) \quad J_{\nu-1}(s) - J_{\nu+1}(s) = 2J'_{\nu}(s) \quad \text{und}$$

$$(3.14) \quad \frac{d}{ds} \left( \frac{J_{\nu-1}(s)}{s^{\nu-1}} \right) = -\frac{J_{\nu}(s)}{s^{\nu-1}}.$$

Es bezeichne  $N_{\nu}$  die kleinste positive Nullstelle der Besselfunktion  $\nu$ -ter Ordnung. Da  $N_{\nu}$  streng monoton steigend in  $\nu$  ist, ergeben sich aus der Identität (3.12) mit  $\nu = \frac{m}{2} + 1$  bzw.  $\nu = \frac{m}{2} + 2$  für alle  $s \in (0, N_{\frac{m}{2}+2})$  die Ungleichungen

$$(3.15) \quad J_{\frac{m}{2}}(s) < J_{\frac{m}{2}}(s) + J_{\frac{m}{2}+2}(s) = (m+2) \frac{J_{\frac{m}{2}+1}(s)}{s},$$

$$J_{\frac{m}{2}+1}(s) < J_{\frac{m}{2}+1}(s) + J_{\frac{m}{2}+3}(s) = (m+4) \frac{J_{\frac{m}{2}+2}(s)}{s} \quad \text{und}$$

$$(3.16) \quad J_{\frac{m}{2}}(s) < (m+2)(m+4) \frac{J_{\frac{m}{2}+2}(s)}{s^2}.$$

Wir setzen zusätzlich  $\gamma(s) := e^{\frac{s^2}{2m+4} + \frac{s^4}{4(m+2)^2(m+4)}} j_{\frac{m}{2}}(s)$  für alle  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  und erhalten mit der Identität (3.14) für alle  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  die Gleichung

$$\begin{aligned} \gamma'(s) &= e^{\frac{s^2}{2m+4} + \frac{s^4}{4(m+2)^2(m+4)}} \left( j'_{\frac{m}{2}}(s) + \left( \frac{s}{m+2} + \frac{s^3}{(m+2)^2(m+4)} \right) j_{\frac{m}{2}}(s) \right) \\ &= 2^{\frac{m}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right) \frac{e^{\frac{s^2}{2m+4} + \frac{s^4}{4(m+2)^2(m+4)}}}{s^{\frac{m}{2}}} \sigma(s), \end{aligned}$$

wobei  $\sigma(s) := -J_{\frac{m}{2}+1}(s) + \left( \frac{s}{m+2} + \frac{s^3}{(m+2)^2(m+4)} \right) J_{\frac{m}{2}}(s)$ . Wir erhalten mit den Gleichungen (3.15) und (3.16) für alle  $s \in (0, N_{\frac{m}{2}+2})$  die Ungleichung

$$\begin{aligned} \frac{m+2}{s} \sigma(s) &= \left( 1 + \frac{s^2}{(m+2)(m+4)} \right) J_{\frac{m}{2}}(s) - \frac{m+2}{s} J_{\frac{m}{2}+1}(s) \\ &= \frac{s^2}{(m+2)(m+4)} J_{\frac{m}{2}}(s) - J_{\frac{m}{2}+2}(s) \\ &< 0. \end{aligned}$$

Also ist  $\gamma'(s) < 0$  für alle  $s \in (0, N_{\frac{m}{2}+2})$  und damit ist  $\gamma$  streng monoton fallend auf  $(0, N_{\frac{m}{2}+2})$ . Daher erhalten wir für alle  $s \in [0, N_{\frac{m}{2}}]$  aus der Tatsache, dass  $\gamma(0) = 1$ , die Abschätzung

$$(3.17) \quad 0 \leq j_{\frac{m}{2}}(s) \leq e^{-\frac{s^2}{2m+4} - \frac{s^4}{4(m+2)^2(m+4)}}.$$

Nach [15, S. 147-152] genügen die Nullstellen  $N_\nu$  für alle  $\nu \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  der Ungleichung

$$\begin{aligned} N_\nu &\geq \nu + 1.8557 \nu^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} \nu^{-\frac{1}{3}} \\ &\geq \nu + 3. \end{aligned}$$

Damit ist  $N_{\frac{m}{2}} \geq \frac{m}{2} + 3 = t_m$  für alle  $m \geq 6$ . Da  $N_2 \geq 5.13 \geq 5$  und  $N_{\frac{5}{2}} \geq 5.76 \geq 5.5$  ist, ist für den Fall  $m \in \{4, 5\}$  die Aussage  $N_{\frac{m}{2}} \geq \frac{m}{2} + 3 = t_m$  auch erfüllt. Demzufolge resultiert aus (3.17) die Ungleichung in (3.10) für alle  $m \in \mathbb{N}_{\geq 4}$ .

Sei  $m \in \{0, 1, 2, 3\}$ . Für alle  $s \in [N_{\frac{m}{2}}, \frac{m}{2} + 3]$  ist  $j_{\frac{m}{2}}(s) < 0$ . Außerdem ist  $|j_{\frac{m}{2}}|$  streng monoton wachsend auf  $[N_{\frac{m}{2}}, \frac{m}{2} + 3]$ . Deshalb ist die Funktion

$$\lambda : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}, s \mapsto e^{-\frac{s^2}{2m+4} - \frac{s^4}{4(m+2)^2(m+4)}} - |j_{\frac{m}{2}}(s)|$$

streng monoton fallend auf  $[N_{\frac{m}{2}}, \frac{m}{2} + 3]$ . Da aber  $\lambda(t_m) > 0$  ist, erhalten wir unsere gewünschte Ungleichung (3.10).

Für den zweiten Teil der Behauptung benötigen wir die folgende Darstellung für normierte Besselfunktionen:

$$j_{\frac{m}{2}}(s) = \Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{s}{2}\right)^{2k}}{k! \Gamma(k + \frac{m}{2} + 1)} \quad \text{für alle } s \in \mathbb{R}.$$

Hieraus und aus der Tatsache, dass  $j_{\frac{m}{2}} > 0$  auf  $[0, \frac{m}{2}]$  ([35, S. 485]) ist, erhalten wir für alle  $s \in [0, 1]$  die Abschätzung

$$1 - \frac{1}{2(m+2)}s^2 + \frac{1}{8(m+2)(m+4)}s^4 - \frac{1}{48(m+2)(m+4)(m+6)}s^6 \leq |j_{\frac{m}{2}}(s)|.$$

Weiterhin ergibt sich für alle  $s \in [0, 1]$  aus der Reihendarstellung der Exponentialfunktion

$$\begin{aligned} e^{-\frac{s^2}{2m+4} - s^4} &\leq 1 - \left(\frac{1}{2(m+2)}s^2 + s^4\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2(m+2)}s^2 + s^4\right)^2 \\ &= 1 - \frac{1}{2(m+2)}s^2 - \frac{8m^2 + 32m + 31}{8(m+2)^2}s^4 + \frac{1}{2(m+2)}s^6 + \frac{1}{2}s^8. \end{aligned}$$

Wenn wir die Ungleichung

$$\begin{aligned} &1 - \frac{1}{2(m+2)}s^2 - \frac{8m^2 + 32m + 31}{8(m+2)^2}s^4 + \frac{1}{2(m+2)}s^6 + \frac{1}{2}s^8 \\ &\leq 1 - \frac{1}{2(m+2)}s^2 + \frac{1}{8(m+2)(m+4)}s^4 - \frac{1}{48(m+2)(m+4)(m+6)}s^6 \end{aligned}$$

für alle  $s \in [0, 1]$  zeigen können, erhalten wir die Behauptung für alle  $s \in [0, 1]$ . Die letzte Ungleichung ist aber äquivalent zu der Aussage

$$s \in \left[ -\sqrt{-\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} + d}}, \sqrt{-\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} + d}} \right],$$

wobei  $c := \frac{24m^2 + 240m + 577}{24(m+2)(m+4)(m+6)}$  und  $d := \frac{8m^2 + 47m + 61}{4(m+2)(m+4)}$ . Offensichtlich ist  $-\sqrt{-\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} + d}} < 0$

und  $1 < \sqrt{-\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} + d}}$ .

Seien nun  $m \geq 2$ ,  $s \in [1, s_m]$  und  $N'_\nu$  die erste Nullstelle der Ableitung der Besselfunktion  $J_\nu$ . Nach [35, S. 486] gilt die Ungleichung  $N'_{\frac{m}{2}} > \sqrt{\frac{m}{2} \left( \frac{m}{2} + 2 \right)}$  für alle  $5 \geq m \geq 3$  und nach [35, S. 485] gilt die Ungleichung  $N'_{\frac{m}{2}} > \frac{m}{2}$  für alle  $m \geq 6$ . Also folgt die untere Abschätzung  $J'_{\frac{m}{2}+1}(s) > 0$ . Damit und mit der Identität (3.13) ergibt sich

$$(3.18) \quad -J_{\frac{m}{2}+2}(s) = 2J'_{\frac{m}{2}+1}(s) - J_{\frac{m}{2}}(s) > -J_{\frac{m}{2}}(s).$$

Als nächstes zeigen wir die Abschätzung  $1 \leq e^{\frac{s^2}{2m+4} + s^4} j_{\frac{m}{2}}(s)$  für alle  $s \in [1, s_m]$ . Dazu betrachten wir die Ungleichung

$$\begin{aligned} & \frac{d}{ds} \left( e^{\frac{s^2}{2m+4} + s^4} j_{\frac{m}{2}}(s) \right) \\ &= e^{\frac{s^2}{2m+4} + s^4} \left( \left( \frac{s}{m+2} + 4s^3 \right) j_{\frac{m}{2}}(s) + j'_{\frac{m}{2}}(s) \right) \\ &\stackrel{(3.14)}{=} 2^{\frac{m}{2}} \Gamma \left( \frac{m}{2} + 1 \right) s^{-\frac{m}{2}} e^{\frac{s^2}{2m+4} + s^4} \left( \left( \frac{s}{m+2} + 4s^3 \right) J_{\frac{m}{2}}(s) - J_{\frac{m}{2}+1}(s) \right) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Die Ungleichung ergibt sich aus den folgenden Überlegungen:

$$\begin{aligned} & 0 < \left( \frac{s}{m+2} + 4s^3 \right) J_{\frac{m}{2}}(s) - J_{\frac{m}{2}+1}(s) \\ &\stackrel{(3.18)}{\Leftarrow} 0 < \left( \frac{s}{m+2} + 4s^3 \right) J_{\frac{m}{2}}(s) - J_{\frac{m}{2}}(s) \\ &\Leftrightarrow 0 < \left( \frac{s}{m+2} + 4s^3 - 1 \right) J_{\frac{m}{2}}(s) \\ &\Leftarrow 0 < \frac{s}{m+2} + 4s^3 - 1. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist erfüllt, weil die Funktion  $g : [1, s_m] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $s \mapsto \frac{s}{m+2} + 4s^3 - 1$  streng monoton steigend ist und die Gleichung  $g(1) = \frac{1}{m+2} + 4 \cdot 1^3 - 1 = \frac{1}{m+2} + 3 > 0$  gilt. Also ist die Funktion  $h : [0, s_m] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $s \mapsto e^{\frac{s^2}{2m+4} + s^4} j_{\frac{m}{2}}(s)$  streng monoton steigend auf  $[1, s_m]$ . Zusätzlich ist  $h > 0$  auf  $[0, 1]$  und es ergibt sich die gewünschte Ungleichung (3.11).  $\square$

Wie oben erwähnt wurde, verfolgen wir als nächstes für den Fall  $m = 1$  die Ideen von Nazarov und Podkorytov. Sie bewiesen für alle  $p \in \mathbb{R}_{>2}$  die Ungleichung von Ball [3, S. 465-473]

$$(3.19) \quad f_1(p) < \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

mit  $f_1(2) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ , indem sie in ihrer Arbeit die nachfolgenden Lemmata und die komplementäre Verteilungsfunktion einer nicht-negativen reellwertigen Funktion, die wir an dieser Stelle jetzt auch einführen, benutzten.

**Definition 3.6.** Sei  $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  ein Maßraum. Für eine nicht-negative messbare Funktion  $g : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  definieren wir ihre komplementäre Verteilungsfunktion  $G : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  durch

$$G(y) := \mu \left( \left\{ x \in X : g(x) > y \right\} \right) \text{ für alle } y \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Offenbar ist  $G$  monoton fallend auf  $\mathbb{R}_{>0}$ .

Das nächste Lemma nahm die entscheidende Rolle bei der Abschätzung von  $f_1$  ein. Den Beweis des Lemmas kann man aus [28, S. 247-267] entnehmen.

**Lemma 3.7.** Seien  $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  ein Maßraum,  $g, h : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  messbare Funktionen mit beschränkten zugehörigen komplementären Verteilungsfunktionen  $G$  und  $H$ . Weiterhin existiere ein  $y_0 \in \mathbb{R}_{>0}$  derart, dass die Differenz  $G - H$  in  $y_0$  einen Vorzeichenwechsel von  $-$  zu  $+$  vollzieht, d. h.

$$G(y) \leq H(y) \quad \text{für alle } y \in (0, y_0),$$

$$G(y) \geq H(y) \quad \text{für alle } y \in (y_0, \infty).$$

Setzen wir  $P := \left\{ p \in \mathbb{R}_{>0} : g^p - h^p \in L_1(X, \mu) \right\}$  und  $\varphi : P \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto \frac{1}{py_0^p} \int_X (g^p - h^p) d\mu$ , so ist  $\varphi$  monoton steigend. Falls also ein  $p_0 \in P$  existiert mit  $\int_X (g^{p_0} - h^{p_0}) d\mu = 0$ , so ist  $\int_X (g^p - h^p) d\mu \geq 0$  für alle  $p \in \mathbb{R}_{>p_0}$ .

In diesem Zusammenhang prüften Nazarov und Podkorytov die Voraussetzungen des Lemmas 3.7 für die Funktionen

$$g : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}, s \mapsto e^{-\frac{\pi}{2}s^2} \quad \text{und} \quad h : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}, s \mapsto |j_{\frac{1}{2}}(\pi s)|$$

mit  $X = (0, \infty)$ ,  $d\mu = dx$  und  $p_0 = 2$  nach. Auf diese Weise konnten sie für alle  $p \in \mathbb{R}_{>2}$  die Ungleichung

$$f_1(p) = p^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty |j_{\frac{1}{2}}(s)|^p ds < \int_0^\infty e^{-\frac{\pi}{2}s^2} ds = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

mit  $f_1(2) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$  folgern. Diese Abschätzung werden wir mit einer schärferen Schranke zeigen können, wenn dafür  $p \in \mathbb{R}_{>\frac{13}{6}}$  vorausgesetzt wird. Dazu suchen wir also ein  $p_0$ , um das Lemma 3.7 anwenden zu können.

**Lemma 3.8.** Sei  $f_m$  wie in (3.8) definiert. Für alle  $m \in \mathbb{N}$  ist  $f_m$  stetig differenzierbar und es gelten die Aussagen

- (i)  $\lim_{p \rightarrow \frac{2m}{m+1}} f_m(p) = \infty$ ,
- (ii)  $\lim_{p \rightarrow \infty} f_m(p) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) (2m+4)^{\frac{m}{2}}$ ,
- (iii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n^{\frac{m}{2}} \int_0^\infty \left(j_{\frac{m}{2}}(s)\right)^n s^{m-1} ds \right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) (2m+4)^{\frac{m}{2}}$ ,
- (iv) für  $m \neq 1$  existiert ein  $p_m \in \left(2 - \frac{2}{m+1}, 2\right]$  mit  $f_m(p_m) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) (2m+4)^{\frac{m}{2}}$  und für  $m = 1$  existiert ein  $p_1 \in \left(2, \frac{13}{6}\right)$  mit  $f_1(p_1) = \sqrt{\frac{3\pi}{2}} = \lim_{p \rightarrow \infty} f_1(p)$ .

**Beweis.** Sei  $m \in \mathbb{N}$ . Für große  $s \in \mathbb{R}_{>0}$  gilt nach [1, 9.2.1] das asymptotische Verhalten

$$J_{\frac{m}{2}}(s) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos\left(s - \frac{m+1}{4}\pi\right)}{\sqrt{s}},$$

welches äquivalent zu

$$(3.20) \quad \left|j_{\frac{m}{2}}(s)\right|^p s^{m-1} \approx 2^{\frac{m+1}{2}p} \left(\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right)\right)^p \pi^{-\frac{p}{2}} \left|\cos\left(s - \frac{m+1}{4}\pi\right)\right|^p s^{\frac{m}{2}(2-p) - \frac{p}{2} - 1}$$

ist. Die rechte Seite von (3.20) ist uneigentlich integrierbar für alle  $p \in \mathbb{R}_{>\frac{2m}{m+1}}$ . Damit existiert  $f_m(p)$  für alle  $p \in \mathbb{R}_{>\frac{2m}{m+1}}$ . Außerdem ist nach dem Differentiationsatz für parameterabhängige Integrale  $f_m$  stetig differenzierbar auf  $\mathbb{R}_{>\frac{2m}{m+1}}$ .

(i) Mit dem asymptotischen Verhalten aus (3.20) ergibt sich

$$\lim_{p \rightarrow \frac{2m}{m+1}} f_m(p) = \infty.$$

(ii) Wir erhalten mit der Ungleichung  $\left|J_{\frac{m}{2}}\right| \underset{[35, S. 406]}{\leq} 1$  die Aussage

$$\begin{aligned} & f_m(p) \\ &= p^{\frac{m}{2}} \int_0^\infty \left|j_{\frac{m}{2}}(s)\right|^p s^{m-1} ds \\ &\stackrel{(3.10)}{\leq} p^{\frac{m}{2}} \int_0^{\frac{m}{2}+3} e^{-\frac{s^2}{2m+4}p} s^{m-1} ds + p^{\frac{m}{2}} \int_{\frac{m}{2}+3}^\infty \left|j_{\frac{m}{2}}(s)\right|^p s^{m-1} ds \\ &\leq \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{2m+4}p} s^{m-1} ds + p^{\frac{m}{2}} 2^{\frac{m}{2}p} \left(\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right)\right)^p \int_{\frac{m}{2}+3}^\infty s^{\frac{m}{2}(2-p)-1} ds \\ &= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) (2m+4)^{\frac{m}{2}} + \underbrace{p^{\frac{m}{2}} 2^{\frac{m}{2}p} \left(\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right)\right)^p \frac{2}{m(p-2)} \left(\frac{m}{2} + 3\right)^{-\frac{m}{2}(p-2)}}_{\xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0} \\ &\xrightarrow{p \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) (2m+4)^{\frac{m}{2}}. \end{aligned}$$



Zusätzlich gilt die Aussage

$$\begin{aligned}
f_m(p) &= p^{\frac{m}{2}} \int_0^\infty |j_{\frac{m}{2}}(s)|^p s^{m-1} ds \\
&\stackrel{(3.11)}{\geq} p^{\frac{m}{2}} \int_0^1 e^{-\frac{s^2 p}{2m+4} - s^4 p} s^{m-1} ds \\
&= \int_0^{\sqrt{p}} e^{-\frac{s^2}{2m+4}} s^{m-1} e^{-\frac{s^4}{p}} ds \\
&\geq \int_0^{\sqrt{p}} e^{-\frac{s^2}{2m+4}} s^{m-1} \left(1 - \frac{s^4}{p}\right) ds \\
&= \int_0^{\sqrt{p}} e^{-\frac{s^2}{2m+4}} s^{m-1} ds - \frac{1}{p} \underbrace{\int_0^{\sqrt{p}} e^{-\frac{s^2}{2m+4}} s^{m+3} ds}_{\xrightarrow{p \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{m+4}{2}\right) (2m+4)^{\frac{m+4}{2}}} \\
&\xrightarrow{p \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{2m+4}} s^{m-1} ds = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) (2m+4)^{\frac{m}{2}}.
\end{aligned}$$

(iii) Nach (ii) gilt die Identität  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_m(n) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) (2m+4)^{\frac{m}{2}}$ . Setzen wir  $N_{m,0} := 0$  und bezeichnen wir mit  $N_{m,k}$  die  $k$ -te Nullstelle der Besselfunktion  $J_{\frac{m}{2}}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ , so gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left| f_m(n) - n^{\frac{m}{2}} \int_0^\infty (j_{\frac{m}{2}}(s))^n s^{m-1} ds \right| \\
&= \left| n^{\frac{m}{2}} \sum_{k=0}^\infty \int_{N_{m,k}}^{N_{m,k+1}} \left( |j_{\frac{m}{2}}(s)|^n - (j_{\frac{m}{2}}(s))^n \right) s^{m-1} ds \right| \\
&= n^{\frac{m}{2}} 2 \sum_{k=0}^\infty \int_{N_{m,2k+1}}^{N_{m,2k+2}} |j_{\frac{m}{2}}(s)|^n s^{m-1} ds \\
&\leq n^{\frac{m}{2}} 2 \int_{N_{m,1}}^\infty |j_{\frac{m}{2}}(s)|^n s^{m-1} ds \\
&\leq n^{\frac{m}{2}} 2^{\frac{m}{2}n+1} \left( \Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right) \right)^n \frac{2}{m(n-2)} N_{m,1}^{-\frac{m}{2}(n-2)} \\
&\lesssim n^{\frac{m}{2}} 2^{\frac{m}{2}n+1} \left( \Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right) \right)^n \frac{2}{m(n-2)} \left( \left(1 + \frac{m-1}{4}\right) \pi \right)^{-\frac{m}{2}(n-2)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

(iv) Für  $m = 1$  gilt die Ungleichung

$$\begin{aligned}
 f_m\left(\frac{13}{6}\right) &< \sqrt{\frac{13}{6}} \int_0^{100000} |j_{\frac{1}{2}}(s)|^{\frac{13}{6}} ds + \sqrt{\frac{13}{6}} \int_{100000}^{\infty} s^{-\frac{13}{6}} ds \\
 &< 2.170553168 + 10^{\frac{1}{6}} \frac{\sqrt{78}}{7000000} < 2.170553168 + 2 \cdot 10^{-6} \\
 &< 2.170555168 < 2.170803763 < \sqrt{\frac{3\pi}{2}}.
 \end{aligned}$$

Außerdem gilt mit Abschätzung (3.19)

$$\sqrt{\frac{3\pi}{2}} < \frac{\pi}{\sqrt{2}} = f_m(2).$$

Da  $f_m$  stetig ist, existiert ein  $p_1 \in (2, \frac{13}{6})$  mit  $f_m(p_1) = \sqrt{\frac{3\pi}{2}}$ .

Für  $m = 2$  gilt die Identität  $f_m(2) = 4 = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)(2m+4)^{\frac{m}{2}}$  und für alle  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  gilt die Identität

$$\begin{aligned}
 f_m(2) &= 2^{\frac{m}{2}} \int_0^{\infty} |j_{\frac{m}{2}}(s)|^2 s^{m-1} ds \\
 &= 2^{\frac{3m}{2}} \left(\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right)\right)^2 \int_0^{\infty} (J_{\frac{m}{2}}(s))^2 s^{-1} ds \\
 (3.21) \quad &= 2^{\frac{3m}{2}} \left(\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right)\right)^2 m^{-1}.
 \end{aligned}$$

[11, 6.574]

Betrachten wir nun die folgenden Ungleichungen

$$\begin{aligned}
 f_m(2) = 2^{\frac{3m}{2}} \left(\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right)\right)^2 m^{-1} &< \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)(2m+4)^{\frac{m}{2}} = \lim_{p \rightarrow \infty} f_m(p) \\
 \Leftrightarrow 2^{\frac{3m}{2}-1} m \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)(2m+4)^{-\frac{m}{2}} &< 1
 \end{aligned}$$

und schätzen die letzte Ungleichung mit der allgemeinen Stirling-Formel für die Gammafunktion ab, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
 2^{\frac{3m}{2}-1} m \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)(2m+4)^{-\frac{m}{2}} &\leq 2^{\frac{3m}{2}-1} m \sqrt{\frac{4\pi}{m}} \left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{m}{2}} e^{\frac{1}{6m}} (2m+4)^{-\frac{m}{2}} \\
 &= \sqrt{\pi} 2^{\frac{m}{2}} m^{\frac{m+1}{2}} e^{\frac{1-3m^2}{6m}} (m+2)^{-\frac{m}{2}}.
 \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist kleiner als 1 für alle  $m > 2$ . Nach (i) existiert ein  $p_m \in (2 - \frac{2}{m+1}, 2]$  mit  $f_m(p_m) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)(2m+4)^{\frac{m}{2}}$ .  $\square$

Das  $p_0$  ist für unseren Fall das  $p_1$  aus Lemma 3.8. Um die Ungleichung (3.9) beweisen zu können, müssen wir noch  $g, h$  passend wählen und für diese die Voraussetzung von Lemma 3.7 prüfen. Wir werden nicht nur für den Fall  $m = 1$  die Abbildungen  $g, h$  definieren müssen, sondern auch für alle  $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ . Deshalb notieren wir an dieser Stelle die

**Definition 3.9.** Für alle  $m \in \mathbb{N}$  definieren wir die Abbildungen

$$(3.22) \quad g_m : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}, s \mapsto e^{-\frac{s^2}{2m+4}} \quad \text{und} \quad h_m : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}, s \mapsto \left| j_{\frac{m}{2}}(s) \right|.$$

Für diese Abbildungen (siehe Abb. 3.6) werden wir im weiteren Verlauf die Voraussetzungen von Lemma 3.7 zeigen.

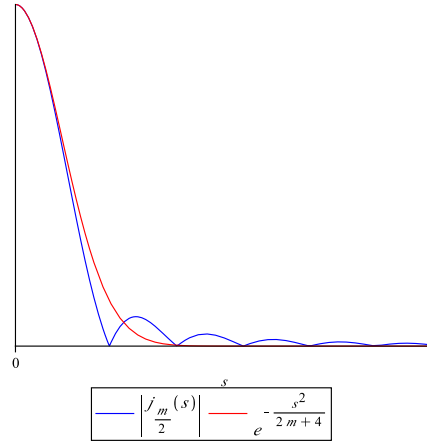


Abbildung 3.6:  $g_m$  und  $h_m$

Ein Beweis für das nächste Lemma ist in [24, S. 144] nachzulesen.

**Lemma 3.10.** Seien  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum,  $g$  und  $h$  messbare Funktionen mit beschränkten zugehörigen komplementären Verteilungsfunktionen  $G$  und  $H$ . Weiterhin sei  $g - h$  eine integrierbare Funktion über  $X$ . Es gilt die Identität

$$(3.23) \quad \int_X (g(s) - h(s)) d\mu(s) = \int_{\mathbb{R}} (G(y) - H(y)) dy.$$

Mit dem letzten und anderen Lemmata beweisen wir jetzt die Ungleichung (3.9) für  $m = 1$ .

**Lemma 3.11** (Abschätzung von  $f_m$ , Teil 1). Seien  $m = 1$ ,  $f_m$  wie in (3.8) und  $p_m$  wie in Lemma 3.8 definiert. Es gilt für alle  $p \in \mathbb{R}_{>p_m}$  die Ungleichung

$$(3.24) \quad f_m(p) < \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) (2m+4)^{\frac{m}{2}} = \sqrt{\frac{3\pi}{2}}.$$

Die Gleichheit ergibt sich für  $p = p_m$ .

**Beweis.** Seien  $g_1$  und  $h_1$  wie in Definition 3.9 gegeben. Da für alle  $p \in \mathbb{R}_{>p_1}$  die Gleichungen

$$\begin{aligned} f_1(p) &= p^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty (h_1(s))^p ds = p^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty \left| \frac{\sin(s)}{s} \right|^p ds \quad \text{und} \\ p^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty (g_1(s))^p ds &= p^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{-\frac{s^2 p}{6}} ds = \sqrt{\frac{3\pi}{2}} \end{aligned}$$

sowie nach Lemma 3.8 die Identität  $\int_0^\infty (g_1^{p_1} - h_1^{p_1})(s) ds = 0$  gelten, reicht es, die Voraussetzungen von Lemma 3.7 mit  $X := \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $d\mu := ds$  und  $p_0 := p_1$  für die zugehörigen komplementären Verteilungsfunktionen  $G_1$  und  $H_1$  zu zeigen. Offensichtlich sind  $g_1, h_1 < 1$  auf  $\mathbb{R}_{>0}$  und damit ist  $G_1(y) = 0 = H_1(y)$  für alle  $y \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ . Also betrachten wir  $G_1$  und  $H_1$  nur auf  $(0, 1)$ . Da  $g_1$  streng monoton fallend auf  $\mathbb{R}_{>0}$  ist, erhalten wir für alle  $y \in (0, 1)$  die Gleichung

$$\begin{aligned} G_1(y) &= \mu \left( \left\{ s \in \mathbb{R}_{>0} : g_1(s) > y \right\} \right) \\ &= \mu \left( \left\{ s \in \mathbb{R}_{>0} : s < \sqrt{6 \log(y^{-1})} \right\} \right) \\ &= \int_0^{\sqrt{6 \log(y^{-1})}} 1 ds \\ &= \sqrt{6 \log(y^{-1})} \end{aligned}$$

und daraus die Identität  $G_1'(y) = - \left( y \sqrt{\frac{2}{3} \log(y^{-1})} \right)^{-1}$ . Um  $H_1$  abzuschätzen, definieren wir zunächst für alle  $k \in \mathbb{N}$

$$(3.25) \quad y_k := \max_{s \in [\pi k, \pi(k+1)]} h_1(s).$$

Es gilt für alle  $k \in \mathbb{N}$  die Ungleichung

$$(3.26) \quad \frac{1}{\pi(k + \frac{1}{2})} < y_k < \frac{1}{\pi k}.$$

Außerdem wissen wir, dass es genau ein  $s_0 \in (0, \pi)$  mit  $g_1(s_0) = y_1$  gibt. Nach Abschätzung (3.10) ist  $h_1 \leq g_1$  auf  $(0, s_0)$ . Wir erhalten damit für alle  $y \in (y_1, \infty)$

$$H_1(y) = \mu \left( \left\{ s \in (0, s_0) : h_1(s) > y \right\} \right) \leq \mu \left( \left\{ s \in (0, s_0) : g_1(s) > y \right\} \right) \leq G_1(y),$$

d. h.  $0 \leq G_1 - H_1$  auf  $(y_1, \infty)$ . Die Differenz  $G_1 - H_1$  ändert das Vorzeichen auf  $\mathbb{R}_{>0}$  mindestens einmal, da die folgende Gleichung gilt:

$$\begin{aligned} p_1 \int_0^\infty y^{p_1-1} (G_1(y) - H_1(y)) dy &= \int_0^\infty G_1 \left( y^{\frac{1}{p_1}} \right) - H_1 \left( y^{\frac{1}{p_1}} \right) dy \\ &\stackrel{(\text{Lemma 3.10})}{=} \int_0^\infty (g_1(s))^{p_1} - (h_1(s))^{p_1} ds \\ &\stackrel{(\text{Lemma 3.8 (iv)})}{=} 0, \end{aligned}$$

wobei die komplementären Verteilungsfunktionen von  $g_1^{p_1}$  und  $h_1^{p_1}$  gleich  $G_1((\cdot)^{p_1})$  und  $H_1((\cdot)^{p_1})$  sind. Weiter zeigen wir, dass  $G_1 - H_1$  genau einmal das Vorzeichen ändert. Dazu beweisen wir, dass  $G_1 - H_1$  monoton steigend auf  $(0, y_1)$  ist. Da  $G_1$  und  $H_1$  monoton fallende stetige Funktionen sind, reicht es  $|H_1'(y)| > |G_1'(y)|$  für alle  $y \in (y_{k+1}, y_k)$  und für alle  $k \in \mathbb{N}$  zu zeigen.

Aus der Bijektivität der Funktion  $h_1 : (0, s_0) \rightarrow (y_1, 1)$  folgt für alle  $y \in (y_1, 1)$  die Identität

$$\begin{aligned} H_1(y) &= \mu \left( \left\{ s \in (0, s_0) : h_1(s) > y \right\} \right) \\ &= \mu \left( \left\{ s \in (0, s_0) : s < h_1^{-1}(y) \right\} \right) \\ &= \int_0^{h_1^{-1}(y)} 1 \, ds \\ &= h_1^{-1}(y). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für  $h_1^{-1}(y) = s$  die Gleichheit

$$|H'_1(y)| = |(h_1^{-1})'(y)| = \frac{1}{|h'_1(s)|}.$$

Aus der Tatsache, dass die Funktion  $H_1$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  differenzierbar auf  $(y_{k+1}, y_k)$  ist, erhalten wir für alle  $y \in (y_{k+1}, y_k)$  die Identität

$$|H'_1(y)| = \sum_{\substack{s \in (0, \pi(k+1)) \\ h_1(s)=y}} \frac{1}{|h'_1(s)|},$$

wobei in  $(s_0, \pi)$  genau eine Lösung der Gleichung  $h_1(s) = y$  und in  $(\pi l, \pi(l+1))$  genau zwei Lösungen dieser Gleichung für alle  $l \in \mathbb{N}_{\leq k}$  existieren. Sei also  $x \in (\pi l, \pi(l+1))$  eine Lösung der Gleichung. Dann existiert ein  $z \in (l, l+1)$  mit  $x = \pi z$  und es gilt die Ungleichung

$$\begin{aligned} (3.27) \quad |h'_1(x)| &= \left| \frac{\cos(x)}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2} \right| \\ &\leq \frac{1}{x} \left( 1 + \frac{|\sin(x)|}{x} \right) \\ &= \frac{1}{\pi z} \left( 1 + \frac{|\sin(\pi z)|}{\pi z} \right) \\ &= \frac{1}{\pi z} \left( 1 + \frac{|\sin(\pi(z-l))|}{\pi z} \right) \\ &\leq \frac{1}{\pi z} \left( 1 + \frac{\pi(z-l)}{\pi l} \right) \\ &= \frac{1}{\pi l}. \end{aligned}$$

Sei nun  $x \in (0, \pi)$  eine Lösung der Gleichung  $h_1(s) = y$ . Es gilt die Ungleichung

$$(3.28) \quad |h'_1(x)| = \frac{\sin(x) - x \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2} \int_0^x t \sin(t) \, dt \leq \frac{1}{x^2} \int_0^x t \, dt = \frac{1}{2}.$$

Aus den Ungleichung (3.27) und (3.28) ergibt sich für alle  $y \in (y_{k+1}, y_k)$  die Abschätzung

$$|H'_1(y)| \geq 2 + 2\pi \sum_{l=1}^k l = 2 + \pi k + \pi k^2.$$

Damit erhalten wir für alle  $y \in (y_{k+1}, y_k)$  die Abschätzung

$$\left| \frac{H'_1(y)}{G'_1(y)} \right| \geq (2 + \pi k + \pi k^2) y \sqrt{\frac{2}{3} \log(y^{-1})}.$$

Mit Ungleichung (3.26) gilt  $y_1 < \frac{1}{\pi} < \frac{1}{\sqrt{e}}$ . Damit ist  $\frac{d}{dy} \left( y \sqrt{\frac{2}{3} \log(y^{-1})} \right) = \frac{2 \log(y^{-1}) - 1}{\sqrt{6 \log(y^{-1})}} > 0$  auf  $(0, y_1)$ . Also ist die Funktion  $y \mapsto y \sqrt{\frac{2}{3} \log(y^{-1})}$  streng monoton steigend auf  $(0, y_1)$ . Weiterhin folgt aus Ungleichung (3.26) die Abschätzung  $y > y_{k+1} > \frac{1}{\pi(k + \frac{3}{2})}$ . Insgesamt erhalten wir für alle  $y \in (y_{k+1}, y_k)$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| \frac{H'_1(y)}{G'_1(y)} \right| &> (2 + \pi k + \pi k^2) \frac{1}{\pi(k + \frac{3}{2})} \sqrt{\frac{2}{3} \log \left( \pi \left( k + \frac{3}{2} \right) \right)} \\ &= \frac{\frac{2}{\pi} + k^2 + k}{k + \frac{3}{2}} \sqrt{\frac{2}{3} \log \left( \pi \left( k + \frac{3}{2} \right) \right)} \\ &\underset{(\frac{2}{\pi} + k^2 > \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2})}{>} \sqrt{\frac{2}{3} \log \left( \frac{5\pi}{2} \right)} \approx 1.172183325 > 1. \quad \square \end{aligned}$$

Mit einer stärkeren Voraussetzung können wir, wie oben bereits diskutiert, mit Lemma 3.11 Balls Ungleichung (3.19) im nächsten Korollar verschärfen.

**Korollar 3.12.** Seien  $m = 1$  und  $f_1$  wie in (3.8) definiert. Es gilt für alle  $p \in \mathbb{R}_{\geq \frac{13}{6}}$  die Ungleichung

$$(3.29) \quad f_1(p) < \frac{1}{2} \Gamma \left( \frac{m}{2} \right) (2m + 4)^{\frac{m}{2}} = \sqrt{\frac{3\pi}{2}}.$$

**Beweis.** Sei  $p_1$  wie in Lemma 3.8 definiert. Nach Lemma 3.8 (iv) ist  $p_1 < \frac{13}{6}$ . Daraus folgt mit Lemma 3.11 die Behauptung.  $\square$

Die Beweismethode des Lemmas 3.11 funktioniert auf diese Art und Weise nur für  $m = 1$ . Als größtes Problem stellt sich dabei unter anderem die exakte Angabe der Nullstellen für weitere  $m \in \mathbb{N}$ . Aus diesem Grund verfolgen wir für den Fall  $2 \leq m \leq 5$  die Beweisidee aus [30, S. 286] von Oleszkiewicz und Pełczyński. Der Vorteil liegt darin, dass wir nichts über die Nullstellen der Besselfunktionen wissen müssen. Der Nachteil bei dieser Methode sind numerische Berechnungen, die wir auch nur für endlich viele  $m$  durchführen können. Deshalb beweisen wir die Ungleichung (3.9) für alle  $m \in \{2, 3, 4, 5\}$ .

Wie zuvor schon angedeutet werden wir für den Fall  $m \in \mathbb{N}_{\geq 6}$  die Beweisidee aus [28, S. 3] von Nazarov und Podkorytov modifizieren. Es stellt sich die Frage, warum wir diese modifizierte Methode nicht für alle  $m \in \mathbb{N}$  anwenden. Der Grund ist, dass sie erst ab  $m = 6$  funktioniert. Für den Beweis der Ungleichung (3.9) für alle  $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  benötigen wir die nachfolgende für den weiteren Verlauf äußerst wichtige Abschätzung.

**Lemma 3.13.** Definieren wir die Abbildung

$$\psi_m : \mathbb{R}_{\geq \frac{m}{2}} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, s \mapsto \frac{2^{\frac{m+1}{2}} \Gamma \left( \frac{m}{2} + 1 \right)}{\Gamma \left( \frac{1}{2} \right) \left( s^2 - \frac{m^2}{4} \right)^{\frac{1}{4}} s^{\frac{m}{2}}}$$

für alle  $m \in \mathbb{N}$ , so erhalten wir für alle  $s \in \mathbb{R}_{\geq \frac{m}{2}}$  die Ungleichung

$$(3.30) \quad \left| j_{\frac{m}{2}}(s) \right| \leq \psi_m(s).$$

Die Abschätzung folgt sofort aus der Definition von  $j_{\frac{m}{2}}$  und aus [11, 8.479].

Für den Beweis der Ungleichung (3.9) für den Fall  $2 \leq m \leq 5$  benötigen wir noch die folgende Integralabschätzung:

**Lemma 3.14.** *Für alle  $m \in \mathbb{N}$  und  $p \in \mathbb{R}_{>0}$  gilt die Ungleichung*

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-\frac{ps^2}{2m+4} - \frac{ps^4}{4(m+2)^2(m+4)}} s^{m-1} ds \\ & \leq \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) (2m+4)^{\frac{m}{2}}}{p^{\frac{m}{2}}} - \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}+2\right) (2m+4)^{\frac{m}{2}}}{(m+4)p^{\frac{m}{2}+1}} + \frac{1}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}+4\right) (2m+4)^{\frac{m}{2}}}{(m+4)^2 p^{\frac{m}{2}+2}}. \end{aligned}$$

**Beweis.** Seien  $m \in \mathbb{N}$  und  $p \in \mathbb{R}_{>0}$ . Es gilt mit der Integraldarstellung der Gammafunktion

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-\frac{ps^2}{2m+4} - \frac{ps^4}{4(m+2)^2(m+4)}} s^{m-1} ds \\ & = \frac{1}{2} \frac{(2m+4)^{\frac{m}{2}}}{p^{\frac{m}{2}}} \int_0^\infty e^{-s - \frac{s^2}{p(m+4)}} s^{\frac{m}{2}-1} ds \\ & \leq \frac{1}{2} \frac{(2m+4)^{\frac{m}{2}}}{p^{\frac{m}{2}}} \int_0^\infty \left(1 - \frac{s^2}{p(m+4)} + \frac{s^4}{2p^2(m+4)^2}\right) e^{-s} s^{\frac{m}{2}-1} ds \\ & = \frac{1}{2} \frac{(2m+4)^{\frac{m}{2}}}{p^{\frac{m}{2}}} \left( \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) - \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}+2\right)}{p(m+4)} + \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}+4\right)}{2p^2(m+4)^2} \right). \quad \square \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt beweisen wir die Ungleichung (3.9) für den Fall  $2 \leq m \leq 5$ . Die Beweisidee der Ungleichung ist für jedes  $m \in \{2, 3, 4, 5\}$  gleich. Trotzdem werden wir auf jedes  $m \in \{2, 3, 4, 5\}$  einzeln eingehen, da für jeden Fall eine eigenständige Berechnung durchgeführt werden muss.

**Lemma 3.15** (Abschätzung von  $f_m$ , Teil 2). *Seien  $2 \leq m \leq 5$  und  $f_m$  wie in (3.8) definiert. Es gilt für alle  $p \in \mathbb{R}_{>2}$  die Ungleichung*

$$(3.31) \quad f_m(p) < \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) (2m+4)^{\frac{m}{2}}.$$

**Beweis.** Für  $m = 2$  können wir den Beweis aus [30, S. 288] entnehmen.

Sei  $m = 3$  und sei  $p \in \mathbb{R}_{\geq \frac{8}{3}}$ . Es gilt die Ungleichung

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |j_{\frac{3}{2}}(s)|^p s^2 ds &= \int_0^{\frac{9}{2}} |j_{\frac{3}{2}}(s)|^p s^2 ds + \int_{\frac{9}{2}}^\infty |j_{\frac{3}{2}}(s)|^p s^2 ds \\ &\stackrel{(3.10)}{\leq} \int_0^\infty e^{-\frac{ps^2}{10} - \frac{ps^4}{700}} s^2 ds + \int_{\frac{9}{2}}^\infty |j_{\frac{3}{2}}(s)|^p s^2 ds \\ &\stackrel{(\text{Lemma 3.14})}{\leq} \frac{5}{2} \sqrt{10\pi} p^{-\frac{3}{2}} - \frac{75}{56} \sqrt{10\pi} p^{-\frac{5}{2}} + \frac{675}{448} \sqrt{10\pi} p^{-\frac{7}{2}} + \int_{\frac{9}{2}}^\infty |j_{\frac{3}{2}}(s)|^p s^2 ds. \end{aligned}$$

Für alle  $s \in \mathbb{R}_{\geq \frac{3}{2}}$  sei  $\psi_3(s) = \frac{3}{(s^2 - \frac{9}{2})^{\frac{1}{4}} s^{\frac{3}{2}}}$  wie in Lemma 3.13. Es gilt für alle  $s \in \mathbb{R}_{\geq \frac{9}{2}}$

$$|j_{\frac{3}{2}}(s)| \stackrel{(3.30)}{\leq} \psi_3(s) \leq 3 \left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{4}} s^{-2}.$$

Damit ergibt sich die Ungleichung

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} |j_{\frac{3}{2}}(s)|^p s^2 ds \\ & \leq \frac{5}{2} \sqrt{10\pi} p^{-\frac{3}{2}} - \frac{75}{56} \sqrt{10\pi} p^{-\frac{5}{2}} + \frac{675}{448} \sqrt{10\pi} p^{-\frac{7}{2}} + \left(3 \left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^p \int_{\frac{9}{2}}^{\infty} s^{-2(p-1)} ds \\ & = \frac{5}{2} \sqrt{10\pi} p^{-\frac{3}{2}} - \frac{75}{56} \sqrt{10\pi} p^{-\frac{5}{2}} + \frac{675}{448} \sqrt{10\pi} p^{-\frac{7}{2}} + \left(3 \left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^p \frac{729}{8} \left(\frac{4}{81}\right)^p \frac{1}{2p-3} \\ & \stackrel{(*)_3}{\leq} \frac{5}{2} \sqrt{10\pi} p^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Es bleibt  $(*)_3$  zu zeigen. Es gelten die Ungleichung

$$\begin{aligned} 0 & \geq -\frac{75}{56} \sqrt{10\pi} p^{-\frac{5}{2}} + \frac{675}{448} \sqrt{10\pi} p^{-\frac{7}{2}} + \frac{729}{8} \underbrace{\left(3 \left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{4}{81}\right)^p}_{< 0.16} \frac{1}{2p-3} \\ & \Leftrightarrow 0 \geq -\frac{75}{56} \sqrt{10\pi} p + \frac{675}{448} \sqrt{10\pi} + \frac{729}{8} 0.16^p \frac{p^{\frac{7}{2}}}{2p-3}. \end{aligned}$$

Da die Funktion  $p \mapsto \frac{729}{8} 0.16^p \frac{p^{\frac{7}{2}}}{2p-3}$  streng monoton fallend auf  $\mathbb{R}_{\geq \frac{8}{3}}$  ist, folgt die obere Ungleichung aus den folgenden Betrachtungen

$$\begin{aligned} 0 & \geq -\frac{75}{56} \sqrt{10\pi} p + \frac{675}{448} \sqrt{10\pi} + \frac{729}{8} 0.16^{\frac{8}{3}} \frac{\left(\frac{8}{3}\right)^{\frac{7}{2}}}{2 \cdot \frac{8}{3} - 3} \\ & \Leftrightarrow 0 \geq -\frac{75}{56} \sqrt{10\pi} p + \frac{675}{448} \sqrt{10\pi} + 10 \\ & \Leftrightarrow p \in \left[ \frac{1}{1200} \sqrt{\frac{10}{\pi}} (135\sqrt{10\pi} + 896), \infty \right) \approx [2.457, \infty). \end{aligned}$$

Sei nun  $p \in (2, \frac{8}{3}]$ . Es ergibt sich mit  $(**_3)$ ,  $(***_3)$ , die wir weiter unten beweisen werden, und mit der Hölder-Ungleichung die Ungleichung

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} |j_{\frac{3}{2}}(s)|^p s^2 ds & = \int_0^{\infty} |j_{\frac{3}{2}}(s)|^{8-3p} |j_{\frac{3}{2}}(s)|^{4p-8} s^2 ds \\ & \leq \left( \int_0^{\infty} |j_{\frac{3}{2}}(s)|^2 s^2 ds \right)^{\frac{8-3p}{2}} \left( \int_0^{\infty} |j_{\frac{3}{2}}(s)|^{\frac{8}{3}} s^2 ds \right)^{\frac{3p-6}{2}} \\ & \stackrel{(3.21), (**_3)}{<} \left( \frac{3\pi}{2} \right)^{\frac{8-3p}{2}} \left( \frac{3\pi}{2} e^{-\frac{1}{2}} \right)^{\frac{3p-6}{2}} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{3\pi}{2} e^{-\frac{3p-6}{4}} \\
&\leq \frac{3\pi}{2} \left(1 + \frac{3p-6}{4}\right)^{-1} \\
&= \frac{6\pi}{3p-2} \\
&\stackrel{(***)}{<} \frac{5}{2} \sqrt{10\pi} p^{-\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

Die Ungleichung  $(***)$  ergibt sich aus der folgenden Argumentation. Voraussetzung dafür ist die Äquivalenz

$$\begin{aligned}
&\frac{6\pi}{3p-2} < \frac{5}{2} \sqrt{10\pi} p^{-\frac{3}{2}} \\
\Leftrightarrow 0 < \left(3 - \frac{12}{5} \sqrt{\frac{\pi}{10}} \sqrt{p}\right) p - 2 =: \varphi(p).
\end{aligned}$$

Weiterhin gilt für die erste und zweite Ableitung von  $\varphi$

$$\begin{aligned}
0 = \varphi'(p) &= -\frac{9}{25} \sqrt{10\pi} \sqrt{p} + 3 \\
\Leftrightarrow p &= \frac{125}{18\pi} \approx 2.21048532
\end{aligned}$$

und  $\varphi''\left(\frac{125}{18\pi}\right) = -\frac{9}{50} \sqrt{\frac{180}{125}} \pi < 0$ . Damit ist  $\varphi$  monoton steigend auf  $(2, \frac{125}{18\pi})$  und monoton fallend auf  $(\frac{125}{18\pi}, \frac{8}{3})$ . Also wird das Minimum von  $\varphi$  am Rand angenommen. Es ist

$$\varphi(2) \approx 0.195205795 > 0 \quad \text{und} \quad \varphi\left(\frac{8}{3}\right) \approx 0.142136110 > 0.$$

Zu zeigen bleibt  $(***)$ . Dazu bedarf es einer numerischen Berechnung. Weil die Abschätzung  $|j_{\frac{3}{2}}(s)| \stackrel{(3.30)}{\leq} \psi_3(s) \leq \left(\frac{100}{91}\right)^{\frac{1}{4}} s^{-2}$  für alle  $s \in \mathbb{R}_{\geq 5}$  gilt, folgt die Ungleichung

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |j_{\frac{3}{2}}(s)|^{\frac{8}{3}} s^2 ds &\leq \int_0^5 |j_{\frac{3}{2}}(s)|^{\frac{8}{3}} s^2 ds + \left(3 \left(\frac{100}{91}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{8}{3}} \int_5^\infty s^{-\frac{10}{3}} ds \\
&< 2.61 + \left(3 \left(\frac{100}{91}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{8}{3}} \frac{3}{875} 5^{\frac{2}{3}} \\
&< 2.61 + 0.2 \\
&< \frac{3\pi}{2} e^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Sei  $m = 4$  und sei  $p \in \mathbb{R}_{\geq \frac{8}{3}}$ . Es gilt die Ungleichung

$$\int_0^\infty |j_2(s)|^p s^3 ds = \int_0^5 |j_2(s)|^p s^3 ds + \int_5^\infty |j_2(s)|^p s^3 ds$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(3.10)}{\leq} \int_0^{\infty} e^{-\frac{ps^2}{12} - \frac{ps^4}{1152}} s^3 ds + \int_5^{\infty} |j_2(s)|^p s^3 ds \\
& \stackrel{(\text{Lemma 3.14})}{\leq} 72p^{-2} - 54p^{-3} + \frac{135}{2}p^{-4} + \int_5^{\infty} |j_2(s)|^p s^3 ds.
\end{aligned}$$

Für alle  $s \in \mathbb{R}_{\geq 2}$  sei  $\psi_4(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{8}{(s^2-8)^{\frac{1}{4}} s^2}$  aus Lemma 3.13. Es gilt für alle  $s \in \mathbb{R}_{\geq 5}$

$$|j_2(s)| \stackrel{(3.30)}{\leq} \psi_4(s) \leq 8\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{25}{21}\right)^{\frac{1}{4}} s^{-\frac{5}{2}}.$$

Damit ergibt sich die Ungleichung

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\infty} |j_2(s)|^p s^3 ds \\
& \leq 72p^{-2} - 54p^{-3} + \frac{135}{2}p^{-4} + \left(8\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{25}{21}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^p \int_5^{\infty} s^{-\frac{5}{2}p+3} ds \\
& = 72p^{-2} - 54p^{-3} + \frac{135}{2}p^{-4} + \left(8\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{25}{21}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^p \frac{1250}{5^{\frac{5}{2}p}(5p-8)} \\
& \stackrel{(*)_4}{\leq} 72p^{-2}.
\end{aligned}$$

Es bleibt  $(*)_4$  zu zeigen. Es gelten die Ungleichung

$$\begin{aligned}
0 & \geq -54p^{-3} + \frac{135}{2}p^{-4} + \underbrace{\left(\frac{8}{5^{\frac{5}{2}}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{25}{21}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^p}_{< 0.12} \frac{1250}{5p-8} \\
\Leftrightarrow 0 & \geq -54p + \frac{135}{2} + 0.12^p \frac{1250p^4}{5p-8}.
\end{aligned}$$

Da die Funktion  $p \mapsto 0.12^p \frac{1250p^4}{5p-8}$  streng monoton fallend auf  $\mathbb{R}_{\geq \frac{8}{3}}$  ist, folgt die obere Ungleichung aus den folgenden Betrachtungen

$$\begin{aligned}
0 & \geq -54p + \frac{135}{2} + 0.12^{\frac{8}{3}} \frac{1250 \left(\frac{8}{3}\right)^4}{5 \cdot \frac{8}{3} - 8} \\
\Leftrightarrow 0 & \geq -54p + \frac{135}{2} + 42 \\
\Leftrightarrow p & \in \left[\frac{73}{36}, \infty\right) = [2.02\bar{7}, \infty).
\end{aligned}$$

Sei nun  $p \in (2, \frac{8}{3}]$ . Es ergibt sich mit  $(**_4)$ ,  $(***_4)$ , die wir weiter unten beweisen werden, und

mit der Hölder-Ungleichung die Ungleichung

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty |j_2(s)|^p s^3 ds &= \int_0^\infty |j_2(s)|^{8-3p} |j_2(s)|^{4p-8} s^3 ds \\
 &\leq \left( \int_0^\infty |j_2(s)|^2 s^3 ds \right)^{\frac{8-3p}{2}} \left( \int_0^\infty |j_2(s)|^{\frac{8}{3}} s^3 ds \right)^{\frac{3p-6}{2}} \\
 &\stackrel{(3.21), (**_4)}{<} 16^{\frac{8-3p}{2}} \left( 16 e^{-\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3p-6}{2}} \\
 &= 16 e^{-(p-2)} \\
 &\leq 16 (1+p-2)^{-1} \\
 &= \frac{16}{p-1} \\
 &\stackrel{(***_4)}{<} 72 p^{-2}.
 \end{aligned}$$

Die Ungleichung  $(***_4)$  ergibt sich aus der folgenden Argumentation. Voraussetzung dafür ist die Äquivalenz

$$\begin{aligned}
 \frac{16}{p-1} &< 72 p^{-2} \\
 \Leftrightarrow 0 &< -\frac{16}{72} p^2 + p - 1 =: \varphi(p).
 \end{aligned}$$

Weiterhin gilt für die erste und zweite Ableitung von  $\varphi$

$$\begin{aligned}
 0 &= \varphi'(p) = -\frac{4}{9} p + 1 \\
 \Leftrightarrow p &= \frac{9}{4}
 \end{aligned}$$

und  $\varphi''\left(\frac{9}{4}\right) = -\frac{4}{9} < 0$ . Damit ist  $\varphi$  monoton steigend auf  $(2, \frac{9}{4})$  und monoton fallend auf  $(\frac{9}{4}, \frac{8}{3})$ . Also wird das Minimum von  $\varphi$  am Rand angenommen. Es ist

$$\varphi(2) = \frac{1}{9} > 0 \quad \text{und} \quad \varphi\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{7}{81} > 0.$$

Zu zeigen bleibt  $(**_4)$ . Dazu bedarf es einer numerischen Berechnung. Weil die Abschätzung  $|j_2(s)| \stackrel{(3.30)}{\leq} \psi_4(s) \leq 8 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{4}} s^{-\frac{5}{2}}$  für alle  $s \in \mathbb{R}_{\geq 6}$  gilt, folgt die Ungleichung

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty |j_2(s)|^{\frac{8}{3}} s^3 ds &\leq \int_0^6 |j_2(s)|^{\frac{8}{3}} s^3 ds + \left( 8 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{4}} \right)^{\frac{8}{3}} \int_6^\infty s^{-\frac{11}{3}} ds \\
 &< 7.6 + \left( 8 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{4}} \right)^{\frac{8}{3}} \frac{6^{\frac{1}{3}}}{576} \\
 &< 7.6 + 0.5 \\
 &< 16 e^{-\frac{2}{3}}.
 \end{aligned}$$

Sei  $m = 5$  und sei  $p \in \mathbb{R}_{\geq \frac{8}{3}}$ . Es gilt die Ungleichung

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\infty} |j_{\frac{5}{2}}(s)|^p s^4 ds \\
&= \int_0^{\frac{11}{2}} |j_{\frac{5}{2}}(s)|^p s^4 ds + \int_{\frac{11}{2}}^{\infty} |j_{\frac{5}{2}}(s)|^p s^4 ds \\
&\stackrel{(3.10)}{\leq} \int_0^{\infty} e^{-\frac{ps^2}{14} - \frac{ps^4}{1764}} s^4 ds + \int_{\frac{11}{2}}^{\infty} |j_{\frac{5}{2}}(s)|^p s^4 ds \\
&\stackrel{(\text{Lemma 3.14})}{\leq} \frac{147}{2} \sqrt{14\pi} p^{-\frac{5}{2}} - \frac{1715}{24} \sqrt{14\pi} p^{-\frac{7}{2}} + \frac{18865}{192} \sqrt{14\pi} p^{-\frac{9}{2}} + \int_{\frac{11}{2}}^{\infty} |j_{\frac{5}{2}}(s)|^p s^4 ds.
\end{aligned}$$

Für alle  $s \in \mathbb{R}_{\geq \frac{5}{2}}$  sei  $\psi_5(s) = \frac{15}{(s^2 - \frac{25}{2})^{\frac{1}{4}} s^{\frac{5}{2}}}$  aus Lemma 3.13. Es gilt für alle  $s \in \mathbb{R}_{\geq \frac{11}{2}}$

$$|j_{\frac{5}{2}}(s)| \stackrel{(3.30)}{\leq} \psi_5(s) \leq 15 \left( \frac{121}{96} \right)^{\frac{1}{4}} s^{-3}.$$

Damit ergibt sich die Ungleichung

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\infty} |j_{\frac{5}{2}}(s)|^p s^4 ds \\
&\leq \frac{147}{2} \sqrt{14\pi} p^{-\frac{5}{2}} - \frac{1715}{24} \sqrt{14\pi} p^{-\frac{7}{2}} + \frac{18865}{192} \sqrt{14\pi} p^{-\frac{9}{2}} + \left( 15 \left( \frac{121}{96} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^p \int_{\frac{9}{2}}^{\infty} s^{-3p+4} ds \\
&= \frac{147}{2} \sqrt{14\pi} p^{-\frac{5}{2}} - \frac{1715}{24} \sqrt{14\pi} p^{-\frac{7}{2}} + \frac{18865}{192} \sqrt{14\pi} p^{-\frac{9}{2}} + \left( \frac{120}{1331} \left( \frac{121}{96} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^p \frac{161051}{32(3p-5)} \\
&\stackrel{(*_5)}{\leq} \frac{147}{2} \sqrt{14\pi} p^{-\frac{5}{2}}.
\end{aligned}$$

Nun fehlt noch der Beweis für  $(*_5)$ . Es gelten die Ungleichung

$$\begin{aligned}
0 &\geq -\frac{1715}{24} \sqrt{14\pi} p^{-\frac{7}{2}} + \frac{18865}{192} \sqrt{14\pi} p^{-\frac{9}{2}} + \underbrace{\left( \frac{120}{1331} \left( \frac{121}{96} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^p}_{<0.1} \frac{161051}{32(3p-5)} \\
&\Leftrightarrow 0 \geq -\frac{1715}{24} \sqrt{14\pi} p + \frac{18865}{192} \sqrt{14\pi} + (0.1)^p \frac{161051 p^{\frac{9}{2}}}{32(3p-5)}.
\end{aligned}$$

Da die Funktion  $p \mapsto (0.1)^p \frac{161051 p^{\frac{9}{2}}}{32(3p-5)}$  streng monoton fallend auf  $\mathbb{R}_{\geq \frac{8}{3}}$  ist, folgt die obere Un-

gleichung aus den folgenden Betrachtungen

$$\begin{aligned}
 0 &\geq -\frac{1715}{24}\sqrt{14\pi}p + \frac{18865}{192}\sqrt{14\pi} + (0.1)^{\frac{8}{3}} \frac{161051 \left(\frac{8}{3}\right)^{\frac{9}{2}}}{32(3 \cdot \frac{8}{3} - 5)} \\
 \Leftrightarrow 0 &\geq -\frac{1715}{24}\sqrt{14\pi}p + \frac{18865}{192}\sqrt{14\pi} + 299 \\
 \Leftrightarrow p &\in \left[ \frac{1}{192080}\sqrt{\frac{14}{\pi}} \left( 18865\sqrt{14\pi} + 57408 \right), \infty \right) \approx [2.01, \infty).
 \end{aligned}$$

Sei nun  $p \in (2, \frac{8}{3}]$ . Es ergibt sich mit  $(**_4)$ ,  $(**_*_4)$ , die wir weiter unten beweisen werden, und mit der Hölder-Ungleichung die Ungleichung

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty |j_{\frac{5}{2}}(s)|^p s^4 ds &= \int_0^\infty |j_{\frac{5}{2}}(s)|^{8-3p} |j_{\frac{5}{2}}(s)|^{4p-8} s^4 ds \\
 &\leq \left( \int_0^\infty |j_{\frac{5}{2}}(s)|^2 s^4 ds \right)^{\frac{8-3p}{2}} \left( \int_0^\infty |j_{\frac{5}{2}}(s)|^{\frac{8}{3}} s^4 ds \right)^{\frac{3p-6}{2}} \\
 &\stackrel{(3.21), (**_5)}{<} \left( \frac{45\pi}{2} \right)^{\frac{8-3p}{2}} \left( \frac{45\pi}{2} e^{-\frac{4}{5}} \right)^{\frac{3p-6}{2}} \\
 &= \frac{45\pi}{2} e^{-\frac{6p-12}{5}} \\
 &\leq \frac{45\pi}{2} \left( 1 + \frac{6p-12}{5} \right)^{-1} \\
 &= \frac{225\pi}{12p-14} \\
 &\stackrel{(**_*_5)}{<} \frac{147}{2} \sqrt{14\pi} p^{-\frac{5}{2}}.
 \end{aligned}$$

Die Ungleichung  $(**_*_5)$  ergibt sich aus der folgenden Argumentation. Zunächst gilt die Äquivalenz

$$\begin{aligned}
 \frac{225\pi}{12p-14} &< \frac{147}{2} \sqrt{14\pi} p^{-\frac{5}{2}} \\
 \Leftrightarrow 0 &< \left( 882\sqrt{14\pi} - 225\pi p^{\frac{3}{2}} \right) p - 1029\sqrt{14\pi} =: \varphi(p),
 \end{aligned}$$

und weiterhin für die erste und zweite Ableitung von  $\varphi$

$$\begin{aligned}
 0 &= \varphi'(p) = -\frac{1125}{2}\pi p^{\frac{3}{2}} + 882\sqrt{14\pi} \\
 \Leftrightarrow p &= \frac{1}{25} \left( 196\sqrt{\frac{14}{\pi}} \right)^{\frac{2}{3}} \approx 2.221041942
 \end{aligned}$$

und  $\varphi'' \left( \frac{1}{25} \left( 196\sqrt{\frac{14}{\pi}} \right)^{\frac{2}{3}} \right) = -\frac{3375}{4} \sqrt{\frac{1}{25} \left( 196\sqrt{\frac{14}{\pi}} \right)^{\frac{2}{3}}} \pi < 0$ . Damit ist  $\varphi$  monoton steigend auf  $\left( 2, \frac{1}{25} \left( 196\sqrt{\frac{14}{\pi}} \right)^{\frac{2}{3}} \right)$  und monoton fallend auf  $\left( \frac{1}{25} \left( 196\sqrt{\frac{14}{\pi}} \right)^{\frac{2}{3}}, \frac{8}{3} \right)$ . Also wird das Minimum

von  $\varphi$  am Rand angenommen. Es ist

$$\varphi(2) \approx 875.862914 > 0 \quad \text{und} \quad \varphi\left(\frac{8}{3}\right) \approx 565.704688 > 0.$$

Nun folgt die Herleitung von  $(**_5)$ . Hierfür bedarf es ebenfalls einer numerischen Berechnung. Aus der Tatsache, dass  $|j_{\frac{5}{2}}(s)| \stackrel{(3.30)}{\leq} \psi_5(s) \leq 15 \left(\frac{144}{119}\right)^{\frac{1}{4}} s^{-3}$  für alle  $s \in \mathbb{R}_{\geq 6}$  ist, folgt die Ungleichung

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} |j_{\frac{5}{2}}(s)|^{\frac{8}{3}} s^4 ds &\leq \int_0^6 |j_{\frac{5}{2}}(s)|^{\frac{8}{3}} s^4 ds + \left(15 \left(\frac{144}{119}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{8}{3}} \int_6^{\infty} s^{-4} ds \\ &< 28.5 + \left(15 \left(\frac{144}{119}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{8}{3}} \frac{1}{648} \\ &< 28.5 + 2.4 \\ &< \frac{45\pi}{2} e^{-\frac{4}{5}}. \end{aligned} \quad \square$$

In den nächsten Schritten bereiten wir den modifizierten Beweis für den Fall  $m \in \mathbb{N}_{\geq 6}$  vor. In der neuen Methode schätzen wir die Funktion  $|j_{\frac{m}{2}}|$  durch  $\psi_m$  ab. Diese Abschätzung ist für alle  $m \in \mathbb{N}_{\leq 5}$  zu grob, weshalb wir die Beweise für den Fall  $m \in \mathbb{N}_{\leq 5}$  mit anderen Methoden durchgeführt haben.

Wir werden in der neuen Methode für alle  $m \in \mathbb{N}_{\geq 6}$  die Abbildungen  $f_m$  und  $|j_{\frac{m}{2}}|$  mit den Funktionen aus der folgenden Definition abschätzen.

**Definition 3.16.** Sei  $m \in \mathbb{N}$  und sei  $\psi_m$  wie in Lemma 3.13 definiert. Wir definieren  $s_m := m$  für alle  $m \geq 7$ ,  $s_6 := 7$  und die Abbildungen

$$(3.32) \quad \rho_m : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}, s \mapsto \begin{cases} |j_{\frac{m}{2}}(s)|, & \text{falls } s \in [0, s_m), \\ \psi_m(s), & \text{falls } s \in [s_m, \infty) \end{cases} \quad \text{sowie}$$

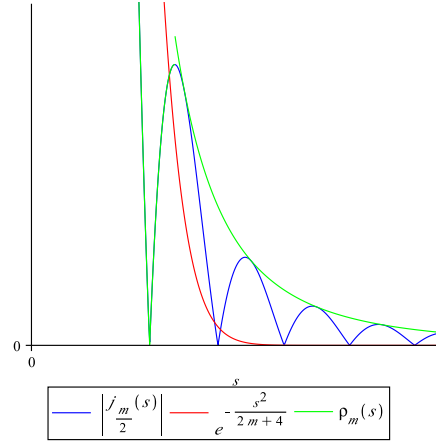
$$(3.33) \quad \tilde{\rho}_m : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}, s \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } s \in [0, s_m), \\ \psi_m(s), & \text{falls } s \in [s_m, \infty). \end{cases}$$

Weiter definieren wir die Abbildungen

$$(3.34) \quad \phi_m : \mathbb{R}_{> 2\frac{m}{m+1}} \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto p^{\frac{m}{2}} \int_0^{\infty} (\rho_m(s))^p s^{m-1} ds \quad \text{und}$$

$$(3.35) \quad \tilde{\phi}_m : \mathbb{R}_{> 2\frac{m}{m+1}} \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto p^{\frac{m}{2}} \int_0^{\infty} (\tilde{\rho}_m(s))^p s^{m-1} ds.$$

Offensichtlich gilt die Ungleichung  $|j_{\frac{m}{2}}| \leq \rho_m$  auf  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  und die Ungleichung  $f_m \leq \phi_m$  auf  $\mathbb{R}_{> 2\frac{m}{m+1}}$  (siehe Abb. 3.7).

Abbildung 3.7:  $g_m$ ,  $h_m$  und  $\rho_m$ 

Jetzt beweisen wir ähnliche Resultate für  $\phi_m$  wie zuvor in Lemma 3.8 für  $f_m$ . Diese benötigen wir für die Anwendung des Lemmas 3.7, aus dem wir für gewisse  $p \in \mathbb{R}_{>\frac{2m}{m+1}}$  die Ungleichung

$$(3.36) \quad \phi_m(p) < \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) (2m+4)^{\frac{m}{2}}$$

folgern können. Diese liefern wiederum die gewünschte Abschätzung für  $f_m$ . Darauf gehen wir später ausführlicher ein.

**Lemma 3.17.** Sei  $m \in \mathbb{N}_{\geq 6}$  und seien  $t_m$  wie in Lemma 3.5 und  $s_m$  wie in Definition 3.16 gegeben. Es gilt für alle  $s \in [t_m, s_m]$  die Ungleichung

$$(3.37) \quad |j_{\frac{m}{2}}(s)| \leq e^{-\frac{s^2}{2m+4}}.$$

**Beweis.** Sei die Funktion

$$\psi_m : \mathbb{R}_{>\frac{m}{2}} \rightarrow \mathbb{R}, s \mapsto 2^{\frac{m+1}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right) \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{-1} \left(s^2 - \frac{m^2}{4}\right)^{-\frac{1}{4}} s^{-\frac{m}{2}}$$

aus Lemma 3.13 gegeben. Mit der Ungleichung 3.30 gilt die Abschätzung  $|j_{\frac{m}{2}}| \leq \psi_m$ .

Seien  $m = 6$  und  $s \in [t_m, s_m]$ . Es genügt, die Abschätzung  $\psi_m(s) e^{\frac{s^2}{2m+4}} \leq 1$  zu zeigen. Es gilt die Identität

$$\frac{d}{ds} \left( \psi_m(s) e^{\frac{s^2}{2m+4}} \right) = \frac{2^{\frac{m}{2}} \Gamma(\frac{m}{2} + 1) (8s^4 - (6m^2 + 12m + 8)s^2 + m^4 + 2m^3) e^{\frac{s^2}{2m+4}}}{\Gamma(\frac{1}{2}) (m+2) (4s^2 - m^2)^{\frac{5}{4}} s^{\frac{m}{2}+1}}.$$

Der mittlere Faktor  $p(s) := 8s^4 - (6m^2 + 12m + 8)s^2 + m^4 + 2m^3$  im Zähler ist echt größer 0, denn für die vier Nullstellen ergibt sich die Ungleichungskette

$$-\frac{1}{2} \sqrt{74 + 2 \cdot \sqrt{505}} < -\frac{1}{2} \sqrt{74 - 2 \cdot \sqrt{505}} < \frac{1}{2} \sqrt{74 - 2 \cdot \sqrt{505}} < \frac{1}{2} \sqrt{74 + 2 \cdot \sqrt{505}} < \frac{m}{2} + 3.$$

Damit gilt auch für die Ableitung die Abschätzung  $\frac{d}{ds} \left( \psi_m(s) e^{\frac{s^2}{2m+4}} \right) > 0$ . Deshalb ist die Abbildung  $\psi_m e^{\frac{s^2}{2m+4}}$  streng monoton steigend auf  $[t_m, s_m]$ . Aus  $\psi_m(7) e^{\frac{7^2}{2m+4}} \approx 0.9492902750$  folgt also für  $m = 6$  die Behauptung.

Sei nun  $m \in \mathbb{N}_{\geq 7}$  und sei  $s \in [t_m, s_m]$ . Auch hier reicht es die Abschätzung  $\psi_m(s) e^{\frac{s^2}{2m+4}} \leq 1$  zu zeigen. Mit der Stirling-Formel für die Gammafunktion ergibt sich die Ungleichung

$$\psi_m(s) e^{\frac{s^2}{2m+4}} \leq \sqrt{2} (m+2)^{\frac{m+1}{2}} \left( s^2 - \frac{m^2}{4} \right)^{-\frac{1}{4}} s^{-\frac{m}{2}} e^{\frac{3s^2-3m^2-12m-11}{6(m+2)}}.$$

Die Funktion auf der rechten Seite der Ungleichung nimmt ihr Maximum am Rand an. Dies ergibt sich aus den folgenden Überlegungen. Es gilt die Identität

$$\begin{aligned} & \frac{d}{ds} \left( \sqrt{2} (m+2)^{\frac{m+1}{2}} \left( s^2 - \frac{m^2}{4} \right)^{-\frac{1}{4}} s^{-\frac{m}{2}} e^{\frac{3s^2-3m^2-12m-11}{6(m+2)}} \right) \\ &= (8s^4 - (6m^2 + 12m + 8)s^2 + m^4 + 2m^3) \frac{(m+2)^{\frac{m-1}{2}} e^{\frac{3s^2-3m^2-12m-11}{6(m+2)}}}{(4s^2 - m^2)^{\frac{5}{4}} s^{\frac{m}{2}+1}}. \end{aligned}$$

Die Ableitung ist größer oder kleiner Null, wenn dies auch auf den ersten Faktor  $8s^4 - (6m^2 + 12m + 8)s^2 + m^4 + 2m^3$  zu trifft. Die Nullstellen des Polynoms sind

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4} \sqrt{6m^2 + 12m + 8 + 2\sqrt{m^4 + 20m^3 + 60m^2 + 48m + 16}} \\ & < -\frac{1}{4} \sqrt{6m^2 + 12m + 8 - 2\sqrt{m^4 + 20m^3 + 60m^2 + 48m + 16}} \\ & < \frac{1}{4} \sqrt{6m^2 + 12m + 8 - 2\sqrt{m^4 + 20m^3 + 60m^2 + 48m + 16}} \\ & < \frac{1}{4} \sqrt{6m^2 + 12m + 8 + 2\sqrt{m^4 + 20m^3 + 60m^2 + 48m + 16}}. \end{aligned}$$

Außerdem gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \sqrt{6m^2 + 12m + 8 - 2\sqrt{m^4 + 20m^3 + 60m^2 + 48m + 16}} < \frac{m}{2} + 3 \quad \text{und} \\ & \frac{1}{4} \sqrt{6m^2 + 12m + 8 + 2\sqrt{m^4 + 20m^3 + 60m^2 + 48m + 16}} < m. \end{aligned}$$

Damit hat die Abbildung  $s \mapsto \sqrt{2} (m+2)^{\frac{m+1}{2}} \left( s^2 - \frac{m^2}{4} \right)^{-\frac{1}{4}} s^{-\frac{m}{2}} e^{\frac{3s^2-3m^2-12m-11}{6(m+2)}}$  höchstens ein Extremum im Intervall  $[\frac{m}{2} + 3, m]$ . Da es ein Minimum ist, wird das Maximum am Rand angenommen. Daher folgt für die beiden Randpunkte

$$\begin{aligned} \psi_m\left(\frac{m}{2} + 3\right) e^{\frac{(\frac{m}{2}+3)^2}{2m+4}} &= \frac{\sqrt{2} (m+2)^{\frac{m+1}{2}}}{(3m+9)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{m}{2} + 3\right)^{\frac{m}{2}} e^{\frac{9m^2+12m-64}{24(m+3)}}} \quad \text{und} \\ \psi_m(m) e^{\frac{m^2}{2m+4}} &= \frac{2 (m+2)^{\frac{m+1}{2}}}{(3m^2)^{\frac{1}{4}} m^{\frac{m}{2}} e^{\frac{12m+11}{6(m+3)}}}. \end{aligned}$$

Für  $m = 7$  ist  $\psi_m\left(\frac{m}{2} + 3\right) e^{\frac{(\frac{m}{2}+3)^2}{2m+4}} = 0.671 < 1$  und  $\psi_m(m) e^{\frac{m^2}{2m+4}} = 0.715 < 1$ . Da die beiden oberen Folgen bzgl.  $m$  streng monoton fallend sind, gilt die Behauptung.  $\square$

In den nächsten beiden Lemmata zeigen wir, dass die Graphen der Funktionen  $\psi_m$  und  $g_m$  genau einen Schnittpunkt in  $\mathbb{R}_{\geq m} \times \mathbb{R}$  besitzen.



**Lemma 3.18.** Seien  $m \in \mathbb{N}_{\geq 6}$  und  $s_m$  wie in Definition 3.16 gegeben. Weiterhin seien  $g_m$  wie in (3.22) und  $\psi_m$  wie in Lemma 3.13 definiert. Die Graphen der Funktionen  $g_m$  und  $\psi_m$  schneiden sich im Intervall  $[s_m, m+2] \times \mathbb{R}$  genau einmal.

**Beweis.** Zunächst zeigen wir die beiden Ungleichungen  $g_m(s_m) > \psi_m(s_m)$  und  $g_m(m+2) < \psi_m(m+2)$ , dann, dass  $g_m$  auf  $[s_m, m+2]$  schneller fällt als  $\psi_m$ . Die Ungleichung  $g_m(s_m) > \psi_m(s_m)$  folgt mit der Stirling-Formel aus

$$\begin{aligned} e^{-\frac{s_m^2}{2m+4}} &> \sqrt{2} (m+2)^{\frac{m+1}{2}} e^{-\frac{m+2}{2} + \frac{1}{6m+12}} \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}} s_m^{-\frac{m+1}{2}} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{m}{m+2}\right)^2 &< 1 + \frac{\log(3)}{2(m+2)} - \frac{1}{3(m+2)^2} - \frac{2\log(2)}{m+2} + \frac{m+1}{m+2} \log\left(\frac{m}{m+2}\right). \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung folgt auch hier aus

$$\begin{aligned} \left(\frac{m}{m+2}\right)^2 &< 1 + \frac{1}{2(m+2)} - \frac{1}{3(m+2)^2} - \frac{2}{m+2} + \frac{m+1}{m+2} \log\left(\frac{m}{m+2}\right) \\ \Leftrightarrow e^{\frac{1}{6} \frac{15m+4}{(m+1)(m+2)}} &> 1 + \frac{2}{m}. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung folgt wiederum aus

$$1 + \frac{1}{6} \frac{15m+4}{(m+1)(m+2)} > 1 + \frac{2}{m},$$

die für alle  $m \in \mathbb{N}_{\geq 12}$  erfüllt ist. Für alle  $m \in \mathbb{N}_{\leq 11}$  erhalten wir die Ungleichung direkt aus numerischen Berechnungen.

Die Ungleichung  $g_m(m+2) < \psi_m(m+2)$  ergibt sich mit der Stirling-Formel aus

$$\begin{aligned} e^{-\frac{(m+2)^2}{2m+4}} &< \sqrt{2} e^{-\frac{m+2}{2}} \\ \Leftrightarrow m+2 &> m+1 - \log(2). \end{aligned}$$

Nun zeigen wir die Ungleichung  $g'_m < \psi'_m < 0$  auf  $[s_m, m+2]$ . Offensichtlich ist  $\psi'_m < 0$  auf  $[s_m, m+2]$ . Es gelten für alle  $s \in [s_m, m+2]$

$$\begin{aligned} g'_m(s) &< \psi'_m(s) \\ \Leftrightarrow g_m(s) &> \psi_m(s) \frac{m+2}{2} \left( \frac{m}{s^2} + \left( s^2 - \frac{m^2}{4} \right)^{-1} \right). \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ergibt sich mit der Stirling-Formel aus

$$\begin{aligned} g_m(s) &> \frac{1}{\sqrt{2}} (m+2)^{\frac{m+3}{2}} e^{-\frac{m+2}{2} + \frac{1}{6m+12}} \left( s^2 - \frac{m^2}{4} \right)^{-\frac{1}{4}} s^{-\frac{m}{2}} \left( \frac{m}{s^2} + \left( s^2 - \frac{m^2}{4} \right)^{-1} \right) \\ \Leftrightarrow -\frac{s^2}{2(m+2)} &> -\frac{1}{2} \log(2) + \frac{m+3}{2} \log(m+2) - \frac{m+2}{2} + \frac{1}{6m+12} \\ &\quad - \frac{1}{4} \log\left( s^2 - \frac{m^2}{4} \right) - \frac{m}{2} \log(s) + \log\left( \frac{m}{s^2} + \left( s^2 - \frac{m^2}{4} \right)^{-1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftarrow \quad s^2 &< (m+2)^2 + \frac{3m+4}{6} - (m+2)(m+3)\log(m+2) \\
&\quad + \frac{m+2}{2}\log\left(s^2 - \frac{m^2}{4}\right) + m(m+2)\log(s) \\
&\quad - 2(m+2)\log\left(\frac{m}{s^2} + \left(s^2 - \frac{m^2}{4}\right)^{-1}\right) \\
\Leftarrow \quad 0 &< (m+2)^2 - s^2 + \frac{m+1}{3} - (m+2)(m+5)\log(m+2) \\
&\quad + (m+2)\log(m) + (m+4)(m+2)\log(s) =: \chi_m(s).
\end{aligned}$$

Nun zeigen wir, dass  $\chi_m$  auf  $[s_m, m+2]$  streng monoton fallend für alle  $m \neq 7$  und dass  $\chi_m(m+2) > 0$  ist. Es ergibt sich für die Ableitung von  $\chi_m$

$$\begin{aligned}
(3.38) \quad 0 &> \frac{(m+4)(m+2)}{s} - 2s = \chi'_m(s) \\
\Leftrightarrow \quad 0 &> (m+4)(m+2) - 2s^2 \\
\Leftarrow \quad 0 &> (m+4)(m+2) - 2m^2 \\
\Leftrightarrow \quad m &> 8.
\end{aligned}$$

Für  $m = 6$  folgt (3.38) aus der Ungleichung  $0 > -18 = (m+4)(m+2) - 2s_m^2$ . Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\chi_m(m+2) &= \frac{m+1}{3} - (m+2)\log(m+2) + (m+2)\log(m) \\
&= \frac{m+1}{3} - (m+2)\log\left(\frac{m+2}{m}\right) \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Diese ist äquivalent zu der Ungleichung

$$0 < \frac{1}{3} - \frac{m+2}{m+1}\log\left(\frac{m+2}{m}\right).$$

Diese Ungleichung ist erfüllt, da  $\frac{m+2}{m+1}\log\left(\frac{m+2}{m}\right)$  streng monoton fallend bzgl.  $m$  ist und  $\frac{6+2}{6+1}\log\left(\frac{6+2}{6}\right) \approx 0.3287795111 < \frac{1}{3}$  ist.

Jetzt ist nur noch der Fall  $m = 7$  offen. Für diesen Fall ist  $\chi''_7(s) = -\frac{99}{s^2} - 2 < 0$ . Also ist  $\chi'_7 = \frac{99}{s} - 2s$  streng monoton fallend mit  $\chi'_7(7) > 0$  und  $\chi'_7(9) < 0$ , d. h.  $\chi_7$  hat genau ein Extremum, das ein Maximum ist. Damit wird das Minimum am Rand angenommen. Für die Randwerte ergeben sich durch numerische Berechnungen die Werte  $\chi_7(7) \approx 7.5247084$  und  $\chi_7(9) \approx 0.40483681$ .  $\square$

Im nächsten Lemma beweisen wir die Aussage, dass die Funktion  $g_m$  ab einem gewissen  $s_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  echt kleiner als  $\psi_m$  ist. Wir wollen also  $g_m$  durch  $\psi_m$  abschätzen.

**Lemma 3.19.** *Sei  $m \in \mathbb{N}_{\geq 6}$  und seien  $g_m$  wie in (3.22) sowie  $\psi_m$  wie in Lemma 3.13 definiert. Es gilt für alle  $s \in \mathbb{R}_{\geq m+2}$  die Ungleichung*

$$(3.39) \quad g_m(s) < \psi_m(s).$$

**Beweis.** Mit der Stirling-Formel gilt für alle  $s \in \mathbb{R}_{\geq m+2}$  die Ungleichung

$$\begin{aligned} \psi_m(s) &\geq 2^{\frac{m+1}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right) \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{-1} s^{-\frac{m+1}{2}} \\ &\stackrel{(\text{Stirling-Formel})}{>} \sqrt{2} (m+2)^{\frac{m+1}{2}} e^{-\frac{m+2}{2}} s^{-\frac{m+1}{2}} \\ &> g_m(s). \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist äquivalent zu der Ungleichung

$$\left(\frac{s}{m+2}\right)^2 > 1 - \frac{\log(2)}{m+2} + \frac{m+1}{m+2} \log\left(\frac{s}{m+2}\right).$$

Diese aber folgt aus der folgenden schärferen Ungleichung

$$\left(\frac{s}{m+2}\right)^2 \geq 1 + \log\left(\frac{s}{m+2}\right). \quad \square$$

Als nächstes zeigen wir zwei Eigenschaften von  $\phi_m$ , die wir später für die Erfüllung der Voraussetzungen des Lemmas 3.7 benötigen, genauer gesagt liefert uns das nächste Lemma das  $p_0$  aus der Voraussetzung von Lemma 3.7 für jedes  $m \in \mathbb{N}_{\geq 6}$ .

**Lemma 3.20.** *Sei  $\phi_m$  wie in (3.34) definiert. Für alle  $m \in \mathbb{N}_{\geq 6}$  ist  $\phi_m$  stetig differenzierbar und es gelten die Aussagen*

$$(i) \quad \lim_{p \rightarrow \frac{2m}{m+1}} \phi_m(p) = \infty,$$

$$(ii) \quad \text{es existiert ein } q_m \in \left(2 - \frac{2}{m+1}, 2\right] \text{ mit } \phi_m(q_m) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) (2m+4)^{\frac{m}{2}}.$$

**Beweis.** Sei  $m \in \mathbb{N}$ . Für große  $s \in \mathbb{R}_{>0}$  gilt das asymptotische Verhalten

$$\psi_m(s) \approx 2^{\frac{m+1}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right) \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{-1} s^{-\frac{m+1}{2}},$$

welches äquivalent zu

$$(3.40) \quad (\psi_m(s))^p s^{m-1} \approx 2^{\frac{m+1}{2}p} \left(\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right)\right)^p \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{-p} s^{\frac{m+1}{2}(2-p)-2}$$

ist. Die rechte Seite von (3.40) ist uneigentlich integrierbar für alle  $p \in \mathbb{R}_{> \frac{2m}{m+1}}$ . Deshalb existiert  $\phi_m(p)$  für alle  $p \in \mathbb{R}_{> \frac{2m}{m+1}}$ . Nach dem Differentiationsatz für parameterabhängige Integrale ist  $\phi_m$  stetig differenzierbar auf  $\mathbb{R}_{> \frac{2m}{m+1}}$ .

(i) Mit dem asymptotischen Verhalten aus (3.40) ergibt sich

$$\lim_{p \rightarrow \frac{2m}{m+1}} \phi_m(p) = \infty.$$

(ii) Für alle  $m \in \{6, 7, 8\}$  ergibt sich die Ungleichung  $\phi_m(2) < \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)(2m+4)^{\frac{m}{2}}$  direkt aus numerischen Berechnungen. Für alle  $m \in \mathbb{N}_{\geq 9}$  gilt die Ungleichung

$$\begin{aligned}
& \phi_m(2) \\
&= 2^{\frac{m}{2}} \int_0^m |j_{\frac{m}{2}}(s)|^2 s^{m-1} ds + 2^{\frac{3m}{2}+1} \left(\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)\right)^2 \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{-2} \int_m^\infty \left(s^2 - \frac{m^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} s^{-1} ds \\
&\leq 2^{\frac{m}{2}} \int_0^\infty |j_{\frac{m}{2}}(s)|^2 s^{m-1} ds + 2^{\frac{3m}{2}+1} \left(\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)\right)^2 \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{-2} \frac{\pi}{3} m^{-1} \\
&= 2^{\frac{3m}{2}} \left(\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)\right)^2 \int_0^\infty (J_{\frac{m}{2}}(s))^2 s^{-1} ds + 2^{\frac{3m}{2}+1} \left(\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)\right)^2 \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{-2} \frac{\pi}{3} m^{-1} \\
&= 2^{\frac{3m}{2}} \left(\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)\right)^2 m^{-1} + 2^{\frac{3m}{2}+1} \left(\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)\right)^2 \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{-2} \frac{\pi}{3} m^{-1} \\
&= \frac{5}{3} 2^{\frac{3m}{2}} \left(\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)\right)^2 m^{-1}.
\end{aligned}$$

Betrachten wir nun die folgenden Ungleichungen

$$\begin{aligned}
& \frac{5}{3} 2^{\frac{3m}{2}} \left(\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)\right)^2 m^{-1} < \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)(2m+4)^{\frac{m}{2}} \\
& \Leftrightarrow \frac{5}{3} 2^{\frac{3m}{2}-1} m \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) (2m+4)^{-\frac{m}{2}} < 1.
\end{aligned}$$

Es gilt mit der allgemeinen Stirling-Formel für die Gammafunktion die Ungleichung

$$\begin{aligned}
\frac{5}{3} 2^{\frac{3m}{2}-1} m \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) (2m+4)^{-\frac{m}{2}} &\leq \frac{5}{3} 2^{\frac{3m}{2}-1} m \sqrt{\frac{4\pi}{m}} \left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{m}{2}} e^{\frac{1}{6m}} (2m+4)^{-\frac{m}{2}} \\
&= \frac{5}{3} \sqrt{\pi} 2^{\frac{m}{2}} m^{\frac{m+1}{2}} e^{\frac{1-3m^2}{6m}} (m+2)^{-\frac{m}{2}}.
\end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist kleiner als 1 für alle  $m \geq 9$ .

Nach (i) existiert nun ein  $q_m \in \left(2 - \frac{2}{m+1}, 2\right]$  mit  $\phi_m(q_m) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)(2m+4)^{\frac{m}{2}}$ . □

Die Eigenschaften von Lemma 3.20 ergeben sich auch für die Funktion  $\tilde{\phi}_m$ , denn es gilt das

**Korollar 3.21.** *Sei  $\tilde{\phi}_m$  wie in (3.35) definiert. Für alle  $m \in \mathbb{N}_{\geq 6}$  ist  $\tilde{\phi}_m$  stetig differenzierbar und es gelten die Aussagen*

$$(i) \quad \lim_{p \rightarrow \frac{2m}{m+1}} \tilde{\phi}_m(p) = \infty,$$

$$(ii) \quad \text{es existiert ein } \tilde{q}_m \in \left(2 - \frac{2}{m+1}, 2\right] \text{ mit } \tilde{\phi}_m(\tilde{q}_m) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)(2m+4)^{\frac{m}{2}}.$$

Den Beweis für Korollar 3.21 können wir dem Beweis von Lemma 3.20 entnehmen.

Wie oben zum Teil schon erläutert beinhaltet für alle  $m \in \mathbb{N}_{\geq 6}$  der Beweis der Abschätzung von  $f_m$  ähnliche Ideen wie für den Fall  $m = 1$ . Wir werden auf die Hilfsfunktion  $\phi_m$  und  $\tilde{\phi}_m$  zurückgreifen.  $\phi_m$  ist deshalb so hilfreich, weil der Integrand  $\rho_m$  ab einem Argument  $s_0$  streng

monoton fallend ist. Dies ermöglicht uns die komplementäre Verteilungsfunktion  $P_m$  von  $\rho_m$  zu berechnen und damit die Voraussetzung des Lemmas 3.7 zu prüfen. Durch den Rückgriff auf  $\phi_m$  verlieren wir jedoch die Gleichheit in der Ungleichung (3.9).

Wir kommen jetzt also zum letzten Teil der Abschätzung von  $f_m$ .

**Lemma 3.22** (Abschätzung von  $f_m$ , Teil 3). *Seien  $m \in \mathbb{N}_{\geq 6}$ ,  $f_m$  wie in (3.8) und  $q_m$  wie in Lemma 3.20 definiert. Es gilt für alle  $p \in \mathbb{R}_{>q_m}$  die Ungleichung*

$$(3.41) \quad f_m(p) < \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) (2m+4)^{\frac{m}{2}}.$$

**Beweis.** Sei  $g_m$  wie in (3.22) definiert und seien  $s_m, \rho_m, \tilde{\rho}_m$  und  $\phi_m, \tilde{\phi}_m$  wie in Definition 3.16 gegeben. Da für alle  $p \in \mathbb{R}_{>q_m}$  die Identitäten

$$\begin{aligned} \phi_m(p) &= p^{\frac{m}{2}} \int_0^\infty (\rho_m(s))^p s^{m-1} ds \quad \text{und} \\ p^{\frac{m}{2}} \int_0^\infty (g_m(s))^p s^{m-1} ds &= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) (2m+4)^{\frac{m}{2}} \end{aligned}$$

sowie nach Lemma 3.20 die Gleichung  $\int_0^\infty (g_m^{q_m} - \rho_m^{q_m})(s) s^{m-1} ds = 0$  gilt, reicht es, die Voraussetzungen von Lemma 3.7 mit  $X := \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $d\mu := s^{m-1} ds$  und  $p_0 := q_m$  für die zugehörigen komplementären Verteilungsfunktionen  $G_m$  und  $P_m$  zu zeigen. Offensichtlich sind  $g_m, \rho_m < 1$  auf  $\mathbb{R}_{>0}$  und damit ist  $G_m(y) = 0 = P_m(y)$  für alle  $y \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ . Also betrachten wir  $G_m$  und  $P_m$  auf  $(0, 1)$ . Nach Ungleichung (3.37) gilt die Abschätzung  $\rho_m \leq g_m$  auf  $(0, s_m]$ . Damit erhalten wir für alle  $y \in (\rho_m(s_m), \infty)$  die Ungleichung

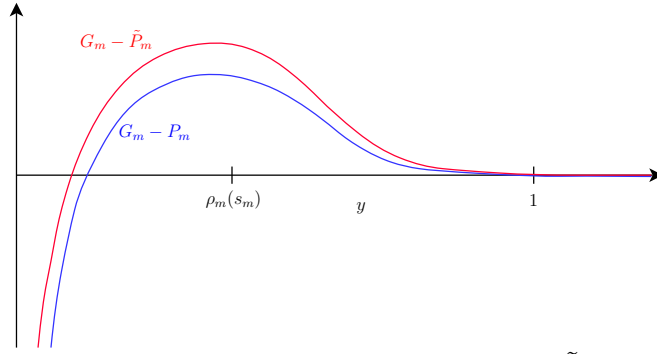
$$P_m(y) = \mu\left(\left\{s \in (0, s_m) : \rho_m(s) > y\right\}\right) < \mu\left(\left\{s \in (0, s_m) : g_m(s) > y\right\}\right) \leq G_m(y),$$

d. h.  $0 \leq G_m - P_m$  auf  $(\rho_m(s_m), \infty)$ . Die Differenz  $G_m - P_m$  ändert das Vorzeichen auf  $\mathbb{R}_{>0}$  mindestens einmal, da die folgende Gleichung gilt:

$$\begin{aligned} q_m \int_0^\infty y^{q_m-1} (G_m(y) - P_m(y)) dy &= \int_0^\infty G_m\left(y^{\frac{1}{q_m}}\right) - P_m\left(y^{\frac{1}{q_m}}\right) dy \\ &\stackrel{(\text{Lemma 3.10})}{=} \int_0^\infty (g_m(s))^{q_m} - (\rho_m(s))^{q_m} s^{m-1} ds \\ &\stackrel{(\text{Lemma 3.20 (ii)})}{=} 0, \end{aligned}$$

wobei die komplementären Verteilungsfunktionen von  $g_m^{q_m}$  und  $\rho_m^{q_m}$  gleich  $G_m((\cdot)^{q_m})$  und  $P_m((\cdot)^{q_m})$  sind.

Wir zeigen, dass  $G_m - P_m$  genau einmal das Vorzeichen ändert. Dazu betrachten wir die  $\tilde{q}_m$  wie in Korollar 3.21. Ebenso wechselt  $G_m - \tilde{P}_m$  das Vorzeichen mindestens einmal (siehe Abb. 3.8), wobei  $\tilde{P}$  die komplementäre Verteilungsfunktion von  $\tilde{\rho}$  sei. Es gilt nämlich

Abbildung 3.8:  $G_m - P_m$  und  $G_m - \tilde{P}_m$ 

die Identität

$$\begin{aligned}
 \tilde{q}_m \int_0^\infty y^{\tilde{q}_m-1} (G_m(y) - \tilde{P}_m(y)) dy &= \int_0^\infty G_m\left(y^{\frac{1}{\tilde{q}_m}}\right) - \tilde{P}_m\left(y^{\frac{1}{\tilde{q}_m}}\right) dy \\
 &\stackrel{(\text{Lemma 3.10})}{=} \int_0^\infty (g_m(s))^{\tilde{q}_m} - (\tilde{\rho}_m(s))^{\tilde{q}_m} s^{m-1} ds \\
 &\stackrel{(\text{Korollar 3.20 (ii)})}{=} 0.
 \end{aligned}$$

Nun reicht es zu zeigen, dass  $G_m - \tilde{P}_m$  genau einmal das Vorzeichen ändert. Nach Lemma 3.18 und 3.19 schneiden sich die Graphen der Funktionen  $\tilde{\rho}_m$  und  $g_m$  genau einmal. Außerdem ist  $g_m < \tilde{\rho}_m$  auf  $\mathbb{R}_{>s_0}$  mit  $s_0 > s_m$  und  $g_m(s_0) = \tilde{\rho}_m(s_0)$ . Also haben die Differenz  $G_m - \tilde{P}_m$  und insbesondere auch die Funktion  $G_m - P_m$  genau eine Nullstelle. Insgesamt ergibt sich also für alle  $p \in \mathbb{R}_{>q_m}$  unsere gewünschte Abschätzung

$$f_m(p) \leq \phi_m(p) < p^{\frac{m}{2}} \int_0^\infty (g_m(s))^p s^{m-1} ds = \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) (2m+4)^{\frac{m}{2}}. \quad \square$$

Mit der Abschätzung von  $f_m$  und mit der Hölder-Ungleichung zeigen wir, dass  $\frac{(2m+4)^{\frac{m}{2}}}{m 2^{m-1} \Gamma(\frac{m}{2})}$  eine obere Schranke für Schnitte durch den Ursprung  $A_\infty(\cdot, 0)$  ist.

Für den Fall  $m = 2$  gilt die Identität  $\frac{(2m+4)^{\frac{m}{2}}}{m 2^{m-1} \Gamma(\frac{m}{2})} = 2$ . Dass 2 eine obere Schranke für den Fall  $m = 2$  ist, zeigten schon Oleszkiewicz und Pełczyński in [30, S. 281-294]. Diese Aussage ist also ein Spezialfall unserer Ergebnisse.

**Satz 3.23 (Hauptsatz).** Für alle  $m, n \in \mathbb{N}$  und  $a \in S^{n-1}$  mit  $1 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n \geq 0$  gelten für Schnitte durch den Ursprung die Aussagen:

(i) falls  $m \neq 1$  ist, so gilt die Ungleichung

$$(3.42) \quad A_{\infty, m(n-1)}(a, 0) \leq \frac{(2m+4)^{\frac{m}{2}}}{m 2^{m-1} \Gamma(\frac{m}{2})} = \lim_{n \rightarrow \infty} A_{\infty, m(n-1)}(v_n, 0),$$

(ii) falls  $m = 1$  und  $a_1 \leq \sqrt{\frac{6}{13}}$  ist, so gilt die Ungleichung

$$(3.43) \quad A_{\infty, n-1}(a, 0) \leq \sqrt{\frac{6}{\pi}}.$$

**Beweis.** Seien  $m, n \in \mathbb{N}$  und  $a \in S^{n-1}$  mit  $1 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n \geq 0$ . Für den ersten Teil der Behauptung gilt die Identität

$$\begin{aligned}
 A_\infty(v_n, 0) &\stackrel{(2.1)}{=} \frac{m}{2^m \left(\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right)\right)^2} \int_0^\infty \left( \prod_{j=1}^n j_{\frac{m}{2}}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) \right) s^{m-1} ds \\
 &= \frac{m}{2^m \left(\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right)\right)^2} \int_0^\infty \left( j_{\frac{m}{2}}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) \right)^n s^{m-1} ds \\
 &= \frac{m}{2^m \left(\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right)\right)^2} n^{\frac{m}{2}} \int_0^\infty \left( j_{\frac{m}{2}}(s) \right)^n s^{m-1} ds \\
 &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{(Lemma 3.8 (iii))}} \frac{m}{2^m \left(\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right)\right)^2} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) (2m+4)^{\frac{m}{2}} = \frac{(2m+4)^{\frac{m}{2}}}{m 2^{m-1} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}.
 \end{aligned}$$

Weiter wenden wir für  $m \neq 1$  und  $a_1 \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  wie U. Haagerup in [12, S. 231-283] die Hölder-Ungleichung an und erhalten damit die Abschätzung

$$\begin{aligned}
 A_\infty(a, 0) &\stackrel{(2.1)}{=} \frac{m}{2^m \left(\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right)\right)^2} \int_0^\infty \left( \prod_{j=1}^n j_{\frac{m}{2}}(a_j s) \right) s^{m-1} ds \\
 &\leq \frac{m}{2^m \left(\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right)\right)^2} \int_0^\infty \left( \prod_{j=1}^n |j_{\frac{m}{2}}(a_j s)| \right) s^{m-1} ds \\
 &\leq \frac{m}{2^m \left(\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right)\right)^2} \prod_{j=1}^n \left( \int_0^\infty |j_{\frac{m}{2}}(a_j s)|^{\frac{1}{a_j^2}} s^{m-1} ds \right)^{a_j^2} \\
 &= \frac{m}{2^m \left(\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right)\right)^2} \prod_{j=1}^n \left( \left( \frac{1}{a_j^2} \right)^{\frac{m}{2}} \int_0^\infty |j_{\frac{m}{2}}(s)|^{\frac{1}{a_j^2}} s^{m-1} ds \right)^{a_j^2} \\
 &\stackrel{(\text{Lemma 3.15, 3.22})}{\leq} \frac{m}{2^m \left(\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right)\right)^2} \prod_{j=1}^n \left( \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) (2m+4)^{\frac{m}{2}} \right)^{a_j^2} \\
 &= \frac{m}{2^m \left(\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right)\right)^2} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) (2m+4)^{\frac{m}{2}} \\
 (3.44) \quad &= \frac{(2m+4)^{\frac{m}{2}}}{m 2^{m-1} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}.
 \end{aligned}$$

Nach Satz 3.3 gilt für alle  $a_1 > \frac{1}{\sqrt{2}}$  die Ungleichung  $A_\infty(a, t) < 2^{\frac{m}{2}}$ . Außerdem gilt mit der Stirling-Formel für alle  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  die Ungleichungen

$$\begin{aligned}
 (3.45) \quad 2^{\frac{m}{2}} &< \frac{(2m+4)^{\frac{m}{2}}}{m 2^{m-1} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \\
 &\Leftarrow 1 < \frac{(2m+4)^{\frac{m}{2}} e^{\frac{m}{2}}}{\sqrt{\pi} 2^m m^{\frac{m+1}{2}} e^{\frac{1}{6m}}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 0 < \frac{m}{2} \log(2m+4) + \frac{m}{2} - \frac{1}{2} \log(\pi) - m \log(2) - \frac{m+1}{2} \log(m) - \frac{1}{6m} \\
&\Leftarrow 0 < \frac{m}{3} - \frac{1}{2} \log(m) - \frac{1}{6m} - \frac{1}{4} \\
&\Leftrightarrow m \geq 3.
\end{aligned}$$

Für den zweiten Teil der Behauptung sei  $m = 1$  und  $a_1 \leq \sqrt{\frac{6}{13}}$ . Mit den gleichen Überlegungen wie in Ungleichung (3.44) und mit Korollar 3.12 gilt die Abschätzung

$$A_\infty(a, 0) \leq \frac{(2m+4)^{\frac{m}{2}}}{m 2^{m-1} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} = \sqrt{\frac{6}{\pi}}. \quad \square$$

Im Gegensatz zu dem Fall  $m \in \{1, 2\}$  ist nach Satz 3.23 der Normalenvektor  $v_2$  für alle  $m \in \mathbb{R}_{\geq 3}$  nicht der maximale Normalenvektor. Dieses Ergebnis halten wir im nächsten Korollar fest. Wir werden sogar zeigen, dass der Schnitt durch den Ursprung senkrecht zu  $v_n$  größer als der Schnitt senkrecht zu  $v_2$  ab einem gewissen  $n \in \mathbb{N}$  ist.

**Korollar 3.24.** *Für alle  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  existiert ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  so, dass für alle  $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$  die folgende Ungleichung gilt:*

$$(3.46) \quad A_{\infty, m(n-1)}(v_2, 0) < A_{\infty, m(n-1)}(v_n, 0).$$

**Beweis.** Sei  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ . Nach Satz 3.3 gilt die Gleichung  $A_\infty(v_2, 0) = 2^{\frac{m}{2}}$ . Mit der Aussage (i) aus dem Hauptsatz 3.23 ergibt sich die Identität  $\frac{(2m+4)^{\frac{m}{2}}}{m 2^{m-1} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} A_{\infty, m(n-1)}(v_n, 0)$ . Die

Folge  $\left( \left| \frac{(2m+4)^{\frac{m}{2}}}{m 2^{m-1} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} - 2^{\frac{m}{2}} \right| \right)_{m \in \mathbb{N}} = \left( 2^{\frac{m}{2}} \left| \frac{(2m+4)^{\frac{m}{2}}}{m 2^{\frac{3m-2}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} - 1 \right| \right)_{m \in \mathbb{N}}$  aus der Ungleichung (3.45)

ist streng monoton steigend, da die Folge  $\left( \frac{(2m+4)^{\frac{m}{2}}}{m 2^{\frac{3m-2}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \right)_{m \in \mathbb{N}}$  streng monoton wachsend ist.

Diese Aussage erhalten wir mit der Stirling-Formel aus

$$\begin{aligned}
&\frac{(2m+4)^{\frac{m}{2}}}{m 2^{\frac{3m-2}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} < \frac{(2(m+1)+4)^{\frac{m+1}{2}}}{(m+1) 2^{\frac{3(m+1)-2}{2}} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} \\
&\Leftarrow \frac{(2m+4)^{\frac{m}{2}}}{m^{\frac{m+1}{2}}} < \frac{(2m+6)^{\frac{m+1}{2}}}{(m+1)^{\frac{m+2}{2}} e^{\frac{1}{6m+6}}} \\
&\Leftrightarrow e^{\frac{1}{3m+3}} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < 2 \left(1 + \frac{1}{m+2}\right)^m \frac{m(m+3)}{(m+1)^2} \\
&\Leftarrow 1.1 \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{m+2}\right)^m \\
&\Leftarrow 3 \approx 1.1 \cdot e < 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{3+2}\right)^3 \approx 3.45.
\end{aligned}$$

Damit finden wir ein  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  mit der Eigenschaft, dass die Ungleichung  $2^{\frac{m}{2}} < \frac{(2m+4)^{\frac{m}{2}}}{m 2^{m-1} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} - \varepsilon$  gilt. Weiterhin existiert ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  so, dass die Ungleichung  $\frac{(2m+4)^{\frac{m}{2}}}{m 2^{m-1} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} - \varepsilon < A_\infty(v_n, 0)$  für alle  $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$  gilt.  $\square$



Setzen wir  $n_3 := 11$ ,  $n_4 := 7$ ,  $n_5 := 6$ ,  $n_6 := 5$ ,  $n_m := 4$  für alle  $12 \geq m \geq 7$  und  $n_m := 3$  für alle  $m \in \mathbb{N}_{\geq 13}$ , so ist unser  $n_0$  aus Korollar 3.24 vermutlich sogar gleich  $n_m$ , weil die Folge der Integrale  $\left( n^{\frac{m}{2}} \int_0^\infty (j_{\frac{m}{2}}(s))^n s^{m-1} ds \right)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 3}}$  vermutlich streng monoton steigend ist. Deshalb wäre auch die Folge  $\left( A_{\infty, m(n-1)}(v_n, 0) \right)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 3}}$  streng monoton steigend. In der Tat legen numerische Berechnungen bis  $n = 14$  und  $m = 14$  die folgende Ungleichung für alle  $n \in \mathbb{N}_{\geq n_m}$  nahe:

$$A_{\infty, m(n-1)}(v_2, 0) < A_{\infty, m(n-1)}(v_n, 0).$$

# Kapitel 4

## Untere und obere Schranke für Schichten im verallgemeinerten Würfel

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Abschätzung der Volumenformel  $V_\infty$  aus Kapitel zwei. Wir wollen für diese eine möglichst optimale untere und obere Schranke finden. Bestenfalls erhalten wir sogar die minimalen und maximalen Normalenvektoren für möglichst „breite“ Schichten.

Im ersten Abschnitt finden wir eine untere Schranke und zeigen, dass sie sogar das Minimum für bestimmte Schichtbreiten ist. Für den Beweis dieser Abschätzung orientieren wir uns an den Beweisideen von König und Koldobsky aus [18, S. 21].

Im zweiten Abschnitt studieren wir zunächst das Grenzverhalten der Volumenformel  $V_{\infty,mn}(v_n, \cdot)$  bzgl.  $n$ . Weiterhin vergleichen wir die Formel für die Normalen  $v_2$  und  $v_n$  für gewisse Schichtbreiten für den Fall  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  miteinander. Wir werden, wie zuvor für Schnitte durch den Ursprung, für gewisse Schichtbreiten  $t \in \mathbb{R}_{>0}$  die Ungleichung

$$(4.1) \quad V_{\infty,mn}(v_2, t) \leq V_{\infty,mn}(v_n, t)$$

für fast alle  $n \in \mathbb{N}$  zeigen. Des Weiteren gehen wir direkt auf die Fälle  $m = 1$  und  $m = 2$ , die sich untereinander und in Bezug auf den Fall  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  in den zuvor betrachteten Richtungen unterscheiden, ein. Es wird sich herausstellen, dass der Fall  $m = 2$  sich dem Fall  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  im Grenzwert für  $n \rightarrow \infty$  annähert. Für den Fall  $m = 1$  werden wir stattdessen die obere Abschätzung

$$(4.2) \quad V_{\infty,n}(a, t) \leq V_{\infty,n}(v_2, t).$$

für gewisse Normalenvektoren  $a \in S^{n-1}$  und Schichtbreiten  $t \in \mathbb{R}_{>0}$  zeigen, wobei  $a = v_n$  erlaubt ist.

### 4.1 Untere Schranke für Schichten

In den nächsten Schritten präsentieren wir den Beweis für die untere Abschätzung von  $V_\infty$ . Nach Kapitel drei würde es natürlich erscheinen, wenn die untere Schranke auch in  $v_1$  angenommen wird. Wir zeigen, dass diese Annahme für gewisse Schichtbreiten stimmt.

Barthe und Koldobsky bewiesen für den Fall  $m = 1$  in [5, S. 89-114] für alle  $t \in [0, \frac{3}{4}]$  und  $a \in S^{n-1}$  die Ungleichung

$$(4.3) \quad t^m = V_{\infty, mn}(v_1, t) \leq V_{\infty, mn}(a, t).$$

Für den Beweis benutzten sie die Ideen von Hensley aus [14, S. 95-100] und zeigten das

**Lemma 4.1.** *Seien  $f \in L_1(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}_{\geq 0}, ds)$  monoton fallend und log-konkav sowie  $t \in \mathbb{R}_{>0}$ . Es gelte die Abschätzung*

$$(4.4) \quad \int_0^t f(s) ds \leq \frac{3}{4} \int_0^\infty f(s) ds.$$

Dann gilt die Ungleichung

$$(4.5) \quad \left( \int_0^\infty f(s) ds \right)^3 t^2 \leq 3 \int_0^\infty f(s) s^2 ds \left( \int_0^t f(s) ds \right)^2.$$

Der Gültigkeitsbereich  $[0, \frac{3}{4}]$  der Ungleichung (4.3) ist nicht maximal. Die Einschränkung des Bereichs ergibt sich durch die Konstante  $\frac{3}{4}$  in Ungleichung (4.4). König und Koldobsky zeigten in [18, S. 14] für den Fall  $n = 3$ , dass der Gültigkeitsbereich der Ungleichung (4.3) gleich  $[0, 2(\sqrt{2} - 1)]$  ist und dass die Ungleichung  $V_{\infty, mn}(v_1, t) \leq V_{\infty, mn}(a, t)$  falsch für alle  $t \in (2(\sqrt{2} - 1), \sqrt{3}]$  und  $a \in S^{n-1}$  ist. Stattdessen zeigten sie für alle  $a \in S^{n-1}$  die Ungleichung  $V_{\infty, mn}(v_2, t) \leq V_{\infty, mn}(a, t)$  für alle  $t \in (2(\sqrt{2} - 1), t_0]$  und die Ungleichung  $V_{\infty, mn}(v_3, t) \leq V_{\infty, mn}(a, t)$  für alle  $t \in (t_0, \sqrt{3}]$ , wobei  $t_0 \approx 1.012919652$  eine Nullstelle des Polynoms  $\sqrt{3}x^3 - 5x^2 + (9\sqrt{3} - 8\sqrt{2})x - 1$  ist (siehe Abb. 4.1).

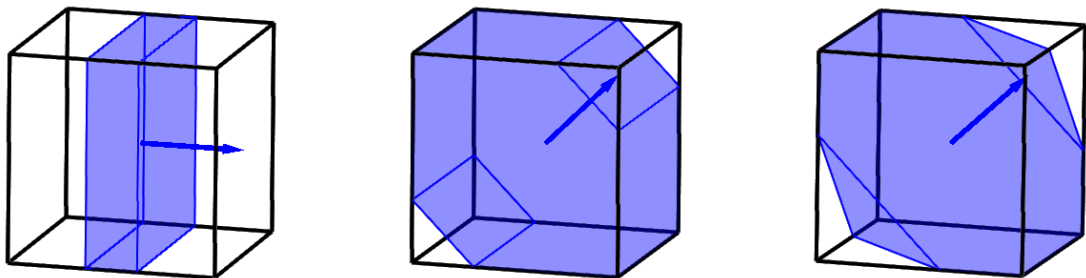


Abbildung 4.1:  $Sl_\infty(v_1, \frac{1}{4})$ ,  $Sl_\infty(v_2, \frac{1}{2})$  und  $Sl_\infty(v_3, \frac{51}{50})$

Weiterhin vermuteten König und Koldobsky in [18, S. 21] für den Fall  $m = 2$  und  $n = 2$ , dass die Ungleichung (4.3) den Gültigkeitsbereich  $[0, t_0]$  besitzt, wobei  $t_0 \approx 0.867115$  eine Lösung der nicht-linearen Gleichung

$$x(1+x^2)\sqrt{2-x^2} + (2x^2-1)\arcsin(x\sqrt{2-x^2}) - \pi x^2 = 0$$

ist. Zusätzlich zeigten sie die Ungleichung für den Gültigkeitsbereich  $[0, \frac{4}{5}]$ . Im Beweis dieser Aussage modifizierten sie die Ideen von Barthe und Koldobsky und bewiesen dazu das nachfolgende Lemma, das die Verallgemeinerung des Lemmas 4.1 auf den Fall  $m = 2$  ist.

**Lemma 4.2.** Seien  $f \in L_1(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}_{\geq 0}, s ds)$  monoton fallend und log-konkav sowie  $t > 0$ . Es gelte die Abschätzung

$$(4.6) \quad \int_0^t f(s)s ds \leq \left(\frac{4}{5}\right)^2 \int_0^\infty f(s)s ds.$$

Dann gilt die Ungleichung

$$(4.7) \quad \left( \int_0^\infty f(s)s ds \right)^2 t^2 \leq 2 \int_0^\infty f(s)s^3 ds \int_0^t f(s)s ds.$$

Die Einschränkung auf den Gültigkeitsbereich  $[0, \frac{4}{5}]$  der Ungleichung (4.3) ergibt sich auch in diesem Fall durch die Konstante  $\frac{4}{5}$  aus Ungleichung (4.6).

Ziel dieses Abschnittes ist es also, für jedes  $m \in \mathbb{N}$  die Ungleichung (4.3) für einen möglichst großen Gültigkeitsbereich zu zeigen. Wir verallgemeinern die oben erläuterten Ideen aus [18, S. 21] von König und Koldobsky. Als erstes kombinieren wir das Lemma 4.3 und das Lemma 4.2 so, dass wir eine Erweiterung der Lemmata auf  $\mathbb{N}_{\geq 3}$  erhalten.

Zunächst beweisen wir dafür einige notwendige Lemmata.

**Lemma 4.3.** Die Folge  $\left( e^{-m} \sum_{k=0}^m \frac{m^k}{k!} \right)_{m \in \mathbb{N}}$  ist monoton fallend und es gilt die Identität

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left( e^{-m} \sum_{k=0}^m \frac{m^k}{k!} \right) = \frac{1}{2}.$$

**Beweis.** Sei  $m \in \mathbb{N}$ . Setzen wir  $S_m(x) := \sum_{k=0}^m \frac{x^k}{k!}$  für alle  $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , so erhalten wir die Gleichheit  $S'_m(x) = S_{m-1}(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Weiterhin setzen wir  $E_m(x) := e^{-x} S_m(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Es ergibt sich für alle  $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  die Identität

$$\begin{aligned} E'_m(x) &= -e^{-x} S_m(x) + e^{-x} S'_m(x) \\ &= -e^{-x} (S_m(x) - S_{m-1}(x)) \\ &= -e^{-x} \frac{x^m}{m!}. \end{aligned}$$

Weiter folgt für alle  $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit der Taylor-Integralform die Gleichung

$$\begin{aligned} E(x) &= e^{-x} \left( e^x - \frac{1}{m!} \int_0^x e^s (x-s)^m ds \right) \\ (4.8) \quad &= 1 - \int_0^x e^{-s} \frac{s^m}{m!} ds. \end{aligned}$$

Nun zeigen wir, dass die Folge  $\left( \int_0^m e^{-s} \frac{s^m}{m!} ds \right)_{m \in \mathbb{N}}$  monoton steigend ist. Es gilt die Identität

$$\begin{aligned}
\int_0^{m+1} e^{-s} \frac{s^{m+1}}{(m+1)!} ds &= -e^{-s} \frac{s^{m+1}}{(m+1)!} \Big|_0^{m+1} + \int_0^{m+1} e^{-s} \frac{s^m}{m!} ds \\
&= -e^{-(m+1)} \frac{(m+1)^{m+1}}{(m+1)!} + \int_m^{m+1} e^{-s} \frac{s^m}{m!} ds + \int_0^m e^{-s} \frac{s^m}{m!} ds.
\end{aligned}$$

Damit genügt es also die folgende Ungleichung zu zeigen:

$$\begin{aligned}
e^{-(m+1)} \frac{(m+1)^{m+1}}{(m+1)!} &\leq \int_m^{m+1} e^{-s} \frac{s^m}{m!} ds \\
\Leftrightarrow e^{-(m+1)} (m+1)^m &\leq \int_0^1 e^{-(s+m)} (s+m)^m ds \\
\Leftrightarrow (m+1)^m &\leq \int_0^1 e^{1-s} (s+m)^m ds \\
\Leftrightarrow (m+1)^m &\leq \int_0^1 e^s (m+1-s)^m ds \\
\Leftrightarrow 1 &\leq \int_0^1 e^s \left(1 - \frac{s}{m+1}\right)^m ds.
\end{aligned}$$

Um die letzte Ungleichung zu beweisen, setzen wir  $g(s) := e^s \left(1 - \frac{s}{m+1}\right)^m$  für alle  $s \in [0, 1]$ . Es ist  $g(0) = 1$  und es ergibt sich für alle  $s \in [0, 1]$  für die Ableitung von  $g$  die Ungleichung

$$\begin{aligned}
g'(s) &= e^s \left( \left(1 - \frac{s}{m+1}\right)^m - \frac{m}{m+1} \left(1 - \frac{s}{m+1}\right)^{m-1} \right) \\
&= e^s \left(1 - \frac{s}{m+1}\right)^{m-1} \left(1 - \frac{s}{m+1} - \frac{m}{m+1}\right) \\
&= e^s \left(1 - \frac{s}{m+1}\right)^{m-1} \frac{1-s}{m+1} \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Daher ist  $g(s) \geq 1$  für alle  $s \in [0, 1]$  und die Folge  $(E_m(m))_{m \in \mathbb{N}}$  monoton fallend. Für den zweiten Teil der Behauptung betrachten wir die Gleichung

$$\begin{aligned}
E_m(m) &= e^{-m} \left( e^m - \frac{1}{m!} \int_0^m e^s (m-s)^m ds \right) \\
&\stackrel{(4.8)}{=} 1 - \frac{e^{-m}}{m!} m^{m+1} \int_0^1 e^{ms} (1-s)^m ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \frac{e^{-m} m^{m+\frac{1}{2}}}{m!} \int_0^{\sqrt{m}} e^{m \frac{s}{\sqrt{m}}} \left(1 - \frac{s}{\sqrt{m}}\right)^m ds \\
&\stackrel{\text{(Stirling-Formel)}}{\approx} 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{m}} e^{m \frac{s}{\sqrt{m}}} \left(1 - \frac{s}{\sqrt{m}}\right)^m ds.
\end{aligned}$$

Zu zeigen bleibt also die Identität  $\lim_{m \rightarrow \infty} \left( \int_0^{\sqrt{m}} e^{m \frac{s}{\sqrt{m}}} \left(1 - \frac{s}{\sqrt{m}}\right)^m ds \right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$ . Definieren wir  $h(s) := (1-s)e^s$  für alle  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , so gilt zunächst die Gleichung

$$\begin{aligned}
h(s) &= (1-s)e^s \\
&= (1-s) \left( 1 + s^2 + \frac{s^2}{2} + \mathcal{O}(s^3) \right) \\
&= 1 - s^2 + \frac{s^2}{2} + \mathcal{O}(s^3) \\
&= 1 - \frac{s^2}{2} + \mathcal{O}(s^3) \text{ für } s \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Dass die Funktionenfolge  $\left( \left( h \left( \frac{\cdot}{\sqrt{m}} \right) \right)^m \right)_{m \in \mathbb{N}}$  punktweise gegen die Funktion  $e^{-\frac{(\cdot)^2}{2}}$  konvergiert, ergibt sich aus

$$\begin{aligned}
\left( h \left( \frac{s}{\sqrt{m}} \right) \right)^m &= \left( \left( 1 - \frac{s}{\sqrt{m}} \right) e^{\frac{s}{\sqrt{m}}} \right)^m \\
&= \left( 1 - \frac{s^2}{2m} + \mathcal{O} \left( \frac{s^3}{m^{\frac{3}{2}}} \right) \right)^m \\
&\xrightarrow{m \rightarrow \infty} e^{-\frac{s^2}{2}}
\end{aligned}$$

für alle  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Weiterhin folgt aus der Gültigkeit der Ungleichung  $h(s) \leq 1 - \frac{s^2}{2}$  für alle  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  die Gültigkeit der Ungleichung

$$\left( \left( 1 - \frac{s}{\sqrt{m}} \right) e^{\frac{s}{\sqrt{m}}} \right)^m = \left( h \left( \frac{s}{\sqrt{m}} \right) \right)^m \leq \left( 1 - \frac{s^2}{2m} \right)^m$$

für alle  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Für den rechten Ausdruck ergibt sich für alle  $s \in [0, \sqrt{m}]$  die Abschätzung

$$\left( 1 - \frac{s^2}{2m} \right)^m \leq e^{-\frac{s^2}{2}}.$$

Diese gilt, da die Funktion  $\varphi : [0, m] \rightarrow \mathbb{R}, s \mapsto \left( 1 - \frac{s}{m} \right)^m e^s$  monoton fallend mit  $\varphi(0) = 1$  ist. Insgesamt ergibt sich mit der majorisierten Konvergenz die Identität

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left( \int_0^{\sqrt{m}} e^{m \frac{s}{\sqrt{m}}} \left( 1 - \frac{s}{\sqrt{m}} \right)^m ds \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \int_0^{\sqrt{m}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds \right) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}. \quad \square$$

Im nächsten Korollar können wir mit Lemma 4.3 eine Beziehung zwischen der unvollständigen Gammafunktion und der Gammafunktion festhalten.

**Korollar 4.4.** Setzen wir  $c_m := m - 1$  für alle  $m \in \mathbb{N}_{\geq 15}$ ,  $c_m := m$  für alle  $14 \geq m \geq 4$  und  $c_3 := 3.01$ , so gilt für alle  $m \in \mathbb{N}$  die Ungleichung

$$(4.9) \quad \int_0^{c_m} e^{-s} s^{m-1} ds \geq \left( \frac{m+2}{m+3} \right)^m \int_0^\infty e^{-s} s^{m-1} ds = \left( \frac{m+2}{m+3} \right)^m (m-1)!.$$

**Beweis.** Die Behauptung folgt für alle  $m \in \mathbb{N}_{\leq 14}$  direkt aus numerischen Berechnungen. Für alle  $m \in \mathbb{N}_{\geq 15}$  betrachten wir die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{1}{(m-1)!} \int_0^{m-1} e^{-s} s^{m-1} ds &= \frac{1}{(m-1)!} \left( (m-1)! - e^{-(m-1)} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m-1)!}{k!} (m-1)^k \right) \\ &= 1 - e^{-(m-1)} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m-1)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Nach Lemma 4.3 ist die Folge  $\left( 1 - e^{-(m-1)} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m-1)^k}{k!} \right)_{m \in \mathbb{N}}$  monoton steigend. Offensichtlich ist die Folge  $\left( \left( \frac{m+2}{m+3} \right)^m \right)_{m \in \mathbb{N}}$  monoton fallend. Für  $m = 15$  erhalten wir die Behauptung aus der Ungleichung

$$1 - e^{-(m-1)} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m-1)^k}{k!} \approx 0.4295632872 > 0.4242738296 \approx \left( \frac{m+2}{m+3} \right)^m. \quad \square$$

Das letzte vorbereitende Lemma ist eine Verallgemeinerung des Lemmas von Barthe und Koldobsky aus [5, S. 6]. Sie nutzten es für den Beweis des Lemmas 4.1. Wir werden es für unsere Verallgemeinerung der Lemmata 4.1 und 4.2 benötigen.

**Lemma 4.5.** Seien  $m \in \mathbb{N}$ ,  $t \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $V, v \in \mathbb{R}_{>0}$  mit  $v < V$ . Definieren wir die Menge  $\mathcal{F}_{t,v,V} := \left\{ f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : f \text{ monoton fallend, log-konkav, } \int_0^\infty f(s) s^{m-1} ds = V, \int_0^t f(s) s^{m-1} ds = v \right\}$ , so gilt die Identität

$$\begin{aligned} (4.10) \quad & \inf \left\{ \int_0^\infty f(s) s^{m+1} ds : f \in \mathcal{F}_{t,v,V} \right\} \\ &= \inf \left\{ \int_0^d e^{-ps} s^{m+1} ds : p \geq 0, d \geq t \geq 0, \int_0^d e^{-ps} s^{m-1} ds = V, \int_0^t e^{-ps} s^{m-1} ds = v \right\}. \end{aligned}$$

**Beweis.** Sei  $f \in \mathcal{F}_{t,v,V}$ . Dann gibt es eine monoton fallende konkave Funktion  $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow [-\infty, \infty)$  mit  $f(s) = e^{\phi(s)}$  für alle  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . In den nächsten Schritten modifizieren wir diese Funktion  $f$  auf dem Definitionsbereich  $[0, t]$ . Aus  $v < V$  folgt die Ungleichung  $-\infty < \phi(t)$  und aus der Konkavität von  $\phi$  die linksseitige Differenzierbarkeit. Also existiert die linksseitige Ableitung  $\phi'_-(t)$ . Für den weiteren Verlauf betrachten wir für alle  $p \in [\phi'_-(t), 0]$  die affin lineare Abbildung

$$\psi_p : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}, s \mapsto p(s - t) + \phi(t)$$

mit Steigung  $p$  und der Identität  $\psi_p(t) = \phi(t)$ . Da  $\phi$  monoton fallend ist, erhalten wir die Ungleichung  $\psi_0 \leq \phi$  auf  $[0, t]$ . Die Konkavität von  $\phi$  liefert die Aussage, dass  $\phi$  kleiner als die Tangente im Punkte  $(t, \phi(t))$  ist, d. h. die Ungleichung  $\psi_{\phi'_-(t)} \geq \phi$  ist auf  $[0, t]$  gültig. Damit und aus der Tatsache, dass die Abbildung  $p \mapsto \int_0^t e^{\psi_p(s)} s^{m-1} ds$  nach dem Stetigkeitssatz für parameterabhängige Integrale stetig ist, existiert ein  $p_0 \in [\phi'_-(t), 0]$  mit

$$(4.11) \quad \int_0^t e^{\psi_{p_0}(s)} s^{m-1} ds = \int_0^t e^{\phi(s)} s^{m-1} ds.$$

Falls  $\phi \neq \psi_{p_0}$  auf dem Bereich  $[0, t]$  ist, so wechselt  $\phi - \psi_{p_0}$  das Vorzeichen in genau einem Punkt  $a \in (0, t)$ . Da nicht nur  $\phi$  konkav und  $\psi_{p_0}$  eine affine lineare Abbildung ist, sondern auch die Gleichungen  $\phi(a) = \psi_{p_0}(a)$  und  $\phi(t) = \psi_{p_0}(t)$  gelten, ergibt sich die Gültigkeit der Ungleichungen  $\psi_{p_0} \geq \phi$  auf  $[0, a]$  und  $\psi_{p_0} \leq \phi$  auf  $[a, t]$ . Daraus erhalten wir die Ungleichung

$$(4.12) \quad \begin{aligned} & \int_0^t e^{\phi(s)} s^{m+1} ds - \int_0^t e^{\psi_{p_0}(s)} s^{m+1} ds \\ &= \int_0^a s^2 (e^{\phi(s)} - e^{\psi_{p_0}(s)}) s^{m-1} ds + \int_a^t s^2 (e^{\phi(s)} - e^{\psi_{p_0}(s)}) s^{m-1} ds \\ &\geq a^2 \int_0^a (e^{\phi(s)} - e^{\psi_{p_0}(s)}) s^{m-1} ds + a^2 \int_a^t (e^{\phi(s)} - e^{\psi_{p_0}(s)}) s^{m-1} ds \\ &\stackrel{(4.11)}{=} 0. \end{aligned}$$

Setzen wir nun weiter die Funktion  $\varphi := \psi_{p_0} \chi_{[0,t]} + \phi \chi_{[t,\infty)}$ , so ist  $\varphi$  offensichtlich eine monoton fallende konkave Funktion mit  $e^\varphi \in \mathcal{F}_{t,v,V}$ . Weiterhin folgt aus der Ungleichung (4.12) die Abschätzung  $\int_0^\infty e^{\varphi(s)} s^{m+1} ds \leq \int_0^\infty f(s) s^{m+1} ds$ .

Als nächstes modifizieren wir die Abbildung  $f$  auf dem Bereich  $(t, \infty)$ . Dazu betrachten wir für alle  $d \in \mathbb{R}_{\geq t}$  die Funktion

$$\varphi_d : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow [-\infty, \infty), s \mapsto \begin{cases} p_0(s-t) + \phi(t), & \text{falls } s \in [0, d], \\ -\infty, & \text{falls } s \in (d, \infty). \end{cases}$$

Es ergibt sich sofort die Ungleichung  $\varphi_t \leq \varphi$  auf  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ . Aus der Konkavität von  $\varphi$  ergibt sich die Ungleichung  $\varphi_\infty = \lim_{d \rightarrow \infty} \varphi_d \geq \varphi$  auf  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ . Damit und aus der Tatsache, dass die Funktion

$d \mapsto \int_0^\infty e^{\varphi_d(s)} s^{m-1} ds$  stetig ist, existiert ein  $d_0 \in \mathbb{R}_{\geq t}$  mit der Gleichheit

$$\int_0^\infty e^{\varphi_{d_0}(s)} s^{m-1} ds = \int_0^\infty e^{\varphi(s)} s^{m-1} ds.$$

Wegen  $v < V$  erhalten wir  $d_0 > t$ . Falls  $\varphi \neq \varphi_{d_0}$  auf  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  ist, so gilt  $d < \infty$ . Nach Definition gelten die Ungleichungen  $\varphi_{d_0} \geq \varphi$  auf  $[0, d_0]$  und  $\varphi_{d_0} \leq \varphi$  auf  $(d_0, \infty)$ . Wie schon



in Ungleichung (4.12) gezeigt wurde, können wir auch hier beweisen, dass sich die folgende Ungleichung ergibt:

$$\int_0^\infty e^{\varphi_{d_0}(s)} s^{m+1} ds \leq \int_0^\infty e^{\varphi(s)} s^{m+1} ds \leq \int_0^\infty f(s) s^{m+1} ds.$$

Insbesondere ist  $e^{\varphi_{d_0}} \in \mathcal{F}_{t,v,V}$  nach Konstruktion von  $\varphi_{d_0}$ . □

Wir notieren im nächsten Schritt das oben angekündigte Lemma. Es wird exemplarisch für den Fall  $m = 3$  bewiesen, da die angewendete Beweismethode nur für jedes einzelne  $m \in \mathbb{N}$  funktioniert. Es ist des Weiteren wichtig zu bemerken, dass das Lemma vermutlich für alle  $m \in \mathbb{N}$  richtig ist.

**Lemma 4.6.** *Seien  $m \in \mathbb{N}_{\leq 3}$ ,  $f \in L_1(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}_{\geq 0}, s^{m-1} ds)$  monoton fallend und log-konkav sowie  $t > 0$ . Falls die Ungleichung*

$$(4.13) \quad \int_0^t f(s) s^{m-1} ds \leq \left( \frac{m+2}{m+3} \right)^m \int_0^\infty f(s) s^{m-1} ds$$

*erfüllt ist, so folgt*

$$(4.14) \quad \left( \int_0^\infty f(s) s^{m-1} ds \right)^{m+2} t^{2m} \leq \left( \frac{m+2}{m} \int_0^\infty f(s) s^{m+1} ds \right)^m \left( \int_0^t f(s) s^{m-1} ds \right)^2.$$

**Beweis.** Für  $m \in \{1, 2\}$  folgt die Behauptung aus Lemma 4.1 und Lemma 4.2. Seien  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ ,  $t \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $V, v \in \mathbb{R}_{>0}$  mit  $v < V$ . Wir betrachten die Menge  $\mathcal{F}_{t,v,V}$  aus Lemma 4.5. Dann reicht mit Hilfe der Voraussetzung (4.13) die Ungleichung

$$(4.15) \quad \frac{m}{m+2} \frac{V^{\frac{m+2}{m}} t^2}{v^{\frac{2}{m}}} \leq \inf \left\{ \int_0^\infty f(s) s^{m+1} ds : f \in \mathcal{F}_{t,v,V} \right\}$$

zu zeigen. Nach Lemma 4.5 reicht es, sich mit den Funktionen  $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $s \mapsto \chi_{[0,d]}(s) e^{-ps}$  zu beschäftigen. Wir betrachten also für alle  $p \geq 0$  und  $d \geq t \geq 0$  die Gleichungen

$$\begin{aligned} V &= \int_0^d e^{-ps} s^{m-1} ds = \frac{1}{p^m} \int_0^x e^{-s} s^{m-1} ds, \\ v &= \int_0^t e^{-ps} s^{m-1} ds = \frac{1}{p^m} \int_0^y e^{-s} s^{m-1} ds \quad \text{und} \\ &\int_0^d e^{-ps} s^{m+1} ds = \frac{1}{p^{m+2}} \int_0^x e^{-s} s^{m+1} ds, \end{aligned}$$

wobei  $x := pd \geq pt =: y$ . Weiterhin halten wir fest, dass die Voraussetzung (4.13) äquivalent zu der nachfolgenden Ungleichung ist:

$$(4.16) \quad \int_0^y e^{-s} s^{m-1} ds \leq \left( \frac{m+2}{m+3} \right)^m \int_0^x e^{-s} s^{m-1} ds \quad \text{für alle } 0 \leq y \leq x.$$

Insgesamt ist es also hinreichend die Ungleichung

$$(4.17) \quad \frac{y^{2m}}{\left(\int_0^y e^{-s} s^{m-1} ds\right)^2} \leq \frac{\left(\frac{m+2}{m} \int_0^x e^{-s} s^{m+1} ds\right)^m}{\left(\int_0^x e^{-s} s^{m-1} ds\right)^{m+2}} \quad \text{für alle } 0 \leq y \leq x$$

mit Voraussetzung (4.16) zu zeigen.

Dazu definieren wir

$$g : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, y \mapsto \frac{y^{2m}}{\left(\int_0^y e^{-s} s^{m-1} ds\right)^2}$$

und beweisen, dass  $g$  streng monoton steigend ist. Es ergeben sich für die erste Ableitung von  $g$  die Ungleichungen

$$\begin{aligned} 0 < g'(y) &= \frac{2my^{2m-1} \left(\int_0^y e^{-s} s^{m-1} ds\right)^2 - y^{2m} 2e^{-y} y^{m-1} \int_0^y e^{-s} s^{m-1} ds}{\left(\int_0^y e^{-s} s^{m-1} ds\right)^4} \\ \Leftrightarrow 0 < m \int_0^y e^{-s} s^{m-1} ds - y^m e^{-y} \\ \Leftrightarrow 0 < m \int_0^y e^{y-s} s^{m-1} ds - m \int_0^y s^{m-1} ds. \end{aligned}$$

Weiterhin definieren wir die Funktion  $\varphi : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  durch

$$(4.18) \quad \int_0^{\varphi(x)} e^{-s} s^{m-1} ds = \left(\frac{m+2}{m+3}\right)^m \int_0^x e^{-s} s^{m-1} ds.$$

Um Ungleichung (4.17) zu beweisen, zeigen wir mit der Voraussetzung  $y \leq \varphi(x) \leq x$  die schärfere Ungleichung

$$(4.19) \quad \left(\frac{m+3}{m+2}\right)^{2m} \frac{(\varphi(x))^{2m}}{\left(\int_0^x e^{-s} s^{m-1} ds\right)^2} \leq \frac{\left(\frac{m+2}{m} \int_0^x e^{-s} s^{m+1} ds\right)^m}{\left(\int_0^x e^{-s} s^{m-1} ds\right)^{m+2}},$$

die sich für  $y \leq \varphi(x) \leq x$  aus den folgenden Überlegung ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{y^{2m}}{\left(\int_0^y e^{-s} s^{m-1} ds\right)^2} &= g(y) \\ &< g(\varphi(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\varphi(x))^{2m}}{\left(\int_0^{\varphi(x)} e^{-s} s^{m-1} ds\right)^2} \\
&= \left(\frac{m+3}{m+2}\right)^{2m} \frac{(\varphi(x))^{2m}}{\left(\int_0^x e^{-s} s^{m-1} ds\right)^2}.
\end{aligned}$$

Die Ungleichung (4.19) ist äquivalent zu der Ungleichung

$$(4.20) \quad (\varphi(x))^m \leq \frac{(m+2)^{\frac{3m}{2}}}{m^{\frac{m}{2}}(m+3)^m} \left( \frac{\int_0^x e^{-s} s^{m+1} ds}{\int_0^x e^{-s} s^{m-1} ds} \right)^{\frac{m}{2}} =: \psi(x).$$

Da die Gleichungen  $\varphi(0) = 0$  und  $\lim_{x \searrow 0} \psi(x) = 0$  gelten, reicht es die Ungleichung

$\left((\varphi(x))^m\right)' \leq \psi'(x)$  zu zeigen, um (4.20) zu beweisen. Aus der Identität (4.18) ergeben sich für die Ableitung von  $\varphi$  die Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx} \left( \int_0^{\varphi(x)} e^{-s} s^{m-1} ds \right) = \frac{d}{dx} \left( \left( \frac{m+2}{m+3} \right)^m \int_0^x e^{-s} s^{m-1} ds \right) \\
&\Leftrightarrow e^{-\varphi(x)} (\varphi(x))^{m-1} \varphi'(x) = \left( \frac{m+2}{m+3} \right)^m e^{-x} x^{m-1} \\
(4.21) \quad &\Leftrightarrow \left( (\varphi(x))^m \right)' = m \left( \frac{m+2}{m+3} \right)^m e^{-x} x^{m-1} e^{\varphi(x)}.
\end{aligned}$$

Für die Ableitung von  $\psi$  ergibt sich die Identität

$$(4.22) \quad \psi'(x) = \frac{m}{2} \frac{(m+2)^{\frac{3m}{2}}}{m^{\frac{m}{2}}(m+3)^m} e^{-x} x^{m-1} \frac{\left( \int_0^x e^{-s} s^{m+1} ds \right)^{\frac{m-2}{2}} \int_0^x (x^2 - s^2) e^{-s} s^{m-1} ds}{\left( \int_0^x e^{-s} s^{m-1} ds \right)^{\frac{m+2}{2}}}.$$

Es bleibt also wegen (4.21) und (4.22) die Ungleichung

$$(4.23) \quad e^{\varphi(x)} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{m+2}{m} \right)^{\frac{m}{2}} \frac{\left( \int_0^x e^{-s} s^{m+1} ds \right)^{\frac{m-2}{2}} \left( \int_0^x (x^2 - s^2) e^{-s} s^{m-1} ds \right)}{\left( \int_0^x e^{-s} s^{m-1} ds \right)^{\frac{m+2}{2}}} =: F(x)$$

zu zeigen. Sei  $m = 3$ . Für alle  $x \in [0, 5.1]$  zeigen wir zunächst die Ungleichung

$$(4.24) \quad \varphi(x) \leq \frac{5}{6}x - \frac{5}{144}x^2 - \frac{11}{3456}x^3 =: \gamma(x).$$

Diese ergibt sich aus der Definition von  $\varphi$  in (4.18), da nämlich die Ungleichung

$$(4.25) \quad \int_0^{\gamma(x)} e^{-s} s^2 ds \geq \left( \frac{5}{6} \right)^3 \int_0^x e^{-s} s^2 ds$$

gilt. (4.25) erhalten wir aus der stärkeren Ungleichung

$$(4.26) \quad \gamma'(x)e^{-\gamma(x)}(\gamma(x))^2 \geq \left(\frac{5}{6}\right)^3 e^{-x}x^2,$$

die sich durch das Ableiten auf beiden Seiten der Ungleichung (4.25) ergibt. Die Ungleichung (4.26) ist äquivalent zu

$$(4.27) \quad \begin{aligned} 1 &\leq e^{\frac{1}{6}x + \frac{5}{144}x^2 + \frac{11}{3456}x^3} \left(1 - \frac{1}{12}x - \frac{11}{960}x^2\right) \left(1 - \frac{1}{24}x - \frac{11}{2880}x^2\right)^2 \\ \Leftrightarrow \quad 0 &\leq \frac{1}{6}x + \frac{5}{144}x^2 + \frac{11}{3456}x^3 + \log\left(1 - \frac{2}{24}x - \frac{33}{2880}x^2\right) \\ &\quad + 2\log\left(1 - \frac{1}{24}x - \frac{11}{2880}x^2\right). \end{aligned}$$

Aus den Ungleichungen  $\frac{2}{24}x + \frac{33}{2880}x^2 \leq \frac{3}{4}$  und  $\log(1-y) \geq -y - \frac{8}{7}y^2$  für alle  $y \leq \frac{3}{4}$  erhalten wir die Aussage, dass die Ungleichung in (4.27) äquivalent zu

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{6}x + \frac{5}{144}x^2 + \frac{11}{3456}x^3 - \left(\frac{2}{24}x + \frac{33}{2880}x^2\right) - \frac{8}{7}\left(\frac{2}{24}x + \frac{33}{2880}x^2\right)^2 \\ &\quad - 2\left(\frac{1}{24}x + \frac{11}{2880}x^2\right) - \frac{16}{7}\left(\frac{1}{24}x + \frac{11}{2880}x^2\right)^2 \\ \Leftrightarrow \quad 0 &\leq \frac{5}{1344}x^2 + \frac{11}{40320}x^3 - \frac{1331}{7257600}x^4 \end{aligned}$$

ist. Damit gilt die Ungleichung (4.24). Als nächstes zeigen wir die Ungleichung (4.23). Wir erhalten mit der Reihendarstellung der Exponentialfunktion die Aussage

$$(4.28) \quad \begin{aligned} &e^{\varphi(x)} \\ &\stackrel{(4.24)}{\leq} e^{\gamma(x)} = e^{\frac{5}{6}x - \frac{5}{144}x^2 - \frac{11}{3456}x^3} \\ &\leq 1 + \frac{5}{6}x + \frac{5}{16}x^2 + \frac{667}{10368}x^3 + \frac{745}{124416}x^4 \end{aligned}$$

und mit der Taylorentwicklung die Aussage

$$(4.29) \quad 1 + \frac{5}{6}x + \frac{2615}{8064}x^2 + \frac{7303}{96768}x^3 + \frac{993469}{92897280}x^4 \leq F(x).$$

Die Ungleichung (4.23) folgt aus den Ungleichungen (4.28), (4.29) und

$$0 \leq \frac{95}{8064} + \frac{3233}{290304}x + \frac{1311607}{278691840}x^2.$$

Weiter ergibt sich aus der Bedingung (4.18) die Identität

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \int_0^{\varphi(x)} e^{-s} s^2 ds \right) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \int_0^\infty e^{-s} s^2 ds = \left(\frac{5}{6}\right)^3 2! = \frac{125}{108} \approx 1.157407407$$

und mit Korollar 4.4 die Ungleichung  $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) \leq 3.01$ . Zusätzlich gilt die Ungleichung

$$\psi(5.1) = \frac{124105}{17601} \sqrt{15} \approx 27.30848237 > 27.270901 \approx \frac{226703}{8313} = (3.01)^3.$$

Nach den Identitäten (4.21) und (4.22) sind  $\varphi$  und  $\psi$  monoton wachsend. Damit ergibt sich insgesamt für alle  $x \in \mathbb{R}_{\geq 5.1}$  die Ungleichung

$$(\varphi(x))^3 \leq \lim_{x \rightarrow \infty} (\varphi(x))^3 \leq (3.01)^3 \leq \psi(5.1) \leq \psi(x). \quad \square$$

Im Beweis von Lemma 4.6 ist in Ungleichung (4.24) zu erkennen, dass wir für solch eine Beweisidee für jedes weitere  $m \in \mathbb{N}$  das Taylorpolynom der Abbildung  $\varphi$  aus (4.18) immer weiter entwickeln müssen. Das Aufstellen des Polynoms wird damit für jeden Schritt deutlich schwieriger. Trotz der Einschränkung auf den Fall  $m \in \mathbb{N}_{\leq 3}$  wollen wir das Lemma festhalten, weil allein die verallgemeinerte Aussage sehr interessant ist.

Das Lemma 4.6 bringt uns im Beweis der Ungleichung (4.3) einen erheblichen Schritt nach vorne, aber für den kompletten Beweis benötigen wir noch das

**Lemma 4.7.** *Seien  $m, n \in \mathbb{N}$  und  $a \in S^{n-1}$  mit  $1 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n \geq 0$ . Der normierte Einheitswürfel  $(\overline{B}_2(0, r_m))^n$  ist in isotroper Position, d. h. es gilt für alle  $j \in \mathbb{N}_{\leq n}$  die Identität*

$$(4.30) \quad \int_{(\overline{B}_2(0, r_m))^n} \|\langle x, a \rangle_{\mathbb{A}}\|_2^2 dx = \int_{(\overline{B}_2(0, r_m))^n} \|x_j\|_2^2 dx = \frac{m}{m+2} r_m^2.$$

**Beweis.** Es ergibt sich für alle  $j \in \mathbb{N}_{\leq n}$  mit der Polarkoordinatendarstellung die Gleichung

$$\begin{aligned} \int_{(\overline{B}_2(0, r_m))^n} \|x_j\|_2^2 dx &= \underbrace{\int_{\overline{B}_2(0, r_m)} \dots \int_{\overline{B}_2(0, r_m)} \|x_j\|_2^2 dx_1 \dots dx_n}_{n\text{-mal}} \\ &= \left( \int_{\overline{B}_2(0, r_m)} 1 dz \right)^{n-1} \int_{\overline{B}_2(0, r_m)} \|z\|_2^2 dz \\ &= m \kappa_m \left( \int_0^{r_m} r^{m-1} dr \right)^{n-1} m \kappa_m \int_0^{r_m} r^{m+1} dr \\ (4.31) \quad &= \frac{m}{m+2} r_m^2. \end{aligned}$$

Weiter gilt für alle  $x \in (\overline{B}_2(0, r_m))^n$  die Identität

$$\begin{aligned} \|\langle x, a \rangle_{\mathbb{A}}\|_2^2 &= \left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j \right\|_2^2 \\ &= \sum_{k=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_j x_{jk} \right)^2 \\ &= \sum_{k=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_j^2 x_{jk}^2 + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \left( a_j \sum_{i=j+1}^n a_i x_{jk} x_{ik} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n a_j^2 \sum_{k=1}^m x_{jk}^2 + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \left( a_j \sum_{i=j+1}^n a_i \left( \sum_{k=1}^m x_{jk} x_{ik} \right) \right) \\
&= \sum_{j=1}^n a_j^2 \|x_j\|_2^2 + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \left( a_j \sum_{i=j+1}^n a_i \langle x_j, x_i \rangle_{\mathbb{R}} \right).
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned}
&\int_{(\overline{B}_2(0, r_m))^n} \|\langle x, a \rangle_{\mathbb{A}}\|_2^2 dx \\
&= \int_{(\overline{B}_2(0, r_m))^n} \sum_{j=1}^n a_j^2 \|x_j\|_2^2 + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \left( a_j \sum_{i=j+1}^n a_i \langle x_j, x_i \rangle_{\mathbb{R}} \right) dx \\
(4.32) \quad &= \sum_{j=1}^n a_j^2 \int_{(\overline{B}_2(0, r_m))^n} \|x_j\|_2^2 dx + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \left( a_j \sum_{i=j+1}^n a_i \int_{(\overline{B}_2(0, r_m))^n} \langle x_j, x_i \rangle_{\mathbb{R}} dx \right).
\end{aligned}$$

Nach Gleichung (4.31) gilt für den ersten Summanden in (4.32) die Aussage

$$\sum_{j=1}^n a_j^2 \int_{(\overline{B}_2(0, r_m))^n} \|x_j\|_2^2 dx = \sum_{j=1}^n a_j^2 \frac{m}{m+2} r_m^2 = \|a\|_2^2 \frac{m}{m+2} r_m^2 = \frac{m}{m+2} r_m^2.$$

Der zweite Summand in (4.32) ist gleich 0, da für alle  $i, j \in \mathbb{N}_{\leq n-1}$  mit  $i \geq j+1$  die folgende Gleichung gilt:

$$\begin{aligned}
&\int_{(\overline{B}_2(0, r_m))^n} \langle x_j, x_i \rangle_{\mathbb{R}} dx \\
&= \underbrace{\left( \int_{\overline{B}_2(0, r_m)} 1 dz \right)^{n-2}}_{=1} \int_{\overline{B}_2(0, r_m)} \int_{\overline{B}_2(0, r_m)} \langle x_j, x_i \rangle dx_j dx_i \\
&= \int_{(\overline{B}_2(0, r_m))^+ \overline{B}_2(0, r_m)} \langle x_j, x_i \rangle dx_j dx_i + \int_{(\overline{B}_2(0, r_m))^- \overline{B}_2(0, r_m)} \langle x_j, x_i \rangle dx_j dx_i \\
&= \int_{(\overline{B}_2(0, r_m))^+ \overline{B}_2(0, r_m)} \langle x_j, x_i \rangle dx_j dx_i - \int_{(\overline{B}_2(0, r_m))^+ \overline{B}_2(0, r_m)} \langle x_j, x_i \rangle dx_j dx_i \\
&= 0,
\end{aligned}$$

wobei  $(\overline{B}_2(0, r_m))^+$  bzw.  $(\overline{B}_2(0, r_m))^-$  die obere bzw. untere Halbkugel sei. □

**Satz 4.8 (Hauptsatz).** Seien  $m \in \mathbb{N}_{\leq 3}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  und  $a \in S^{n-1}$  mit  $1 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n \geq 0$ . Es gilt für alle  $t \in [0, \frac{m+2}{m+3}]$  die Ungleichung

$$(4.33) \quad t^m = V_{\infty, mn}(v_1, t) \leq V_{\infty, mn}(a, t).$$

**Beweis.** Für den ersten Teil der Behauptung gilt die Identität

$$\begin{aligned} V_{\infty}(v_1, t) &\stackrel{(2.2)}{=} \frac{m}{2^m \left(\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right)\right)^2} t^m \int_0^{\infty} j_{\frac{m}{2}}(s) j_{\frac{m}{2}}(ts) s^{m-1} ds \\ &= m t^{\frac{m}{2}} \int_0^{\infty} J_{\frac{m}{2}}(s) J_{\frac{m}{2}}(ts) s^{-1} ds \\ &\stackrel{[11, 6.574, 9.155]}{=} t^m. \end{aligned}$$

Für den zweiten Teil der Behauptung betrachten wir die folgende

Annahme: Es existiert ein  $a \in S^{n-1} \setminus \{v_1\}$  mit  $1 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n \geq 0$  so, dass die Ungleichung  $V_{\infty}(a, t) < V_{\infty}(v_1, t)$  erfüllt ist.

Setzen wir  $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ ,  $s \mapsto m A_{\infty}(a, s)$ , so ergibt sich die Identität

$$\begin{aligned} \int_0^t f(s) s^{m-1} ds &= m \int_0^t A_{\infty}(a, s) s^{m-1} ds \\ &= m \kappa_m r_m^m \int_0^t A_{\infty}(a, s) s^{m-1} ds \\ &= m \kappa_m \int_0^{t r_m} A_{\infty}\left(a, \frac{s}{r_m}\right) s^{m-1} ds \\ &\stackrel{(\text{Polarkoordinaten})}{=} \int_{\overline{B}_2(0, t r_m)} A_{\infty}\left(a, \frac{\|\tau\|_2}{r_m}\right) d\tau \\ &= V_{\infty}(a, t) \end{aligned}$$

und ebenso erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(s) s^{m-1} ds &= m \int_0^{\infty} A_{\infty}(a, s) s^{m-1} ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} A_{\infty}\left(a, \frac{\|\tau\|_2}{r_m}\right) d\tau \\ &= 1. \end{aligned}$$

Daraus und mit dem ersten Teil der Behauptung sowie mit der Annahme ergibt sich für

alle  $t \in [0, \frac{m+2}{m+3}]$  die Ungleichung

$$\begin{aligned} \int_0^t f(s) s^{m-1} ds = V_\infty(a, t) &\leq V_\infty(v_1, t) = t^m \\ &\leq \left( \frac{m+2}{m+3} \right)^m = \left( \frac{m+2}{m+3} \right)^m \int_0^\infty f(s) s^{m-1} ds. \end{aligned}$$

Daher ist also die Voraussetzung (4.13) von Lemma 4.6 erfüllt und wir bekommen mit der Identität

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(s) s^{m+1} ds &= m \int_0^\infty A_\infty(a, s) s^{m+1} ds \\ &= m \kappa_m r_m^{-2} \int_0^\infty A_\infty\left(a, \frac{s}{r_m}\right) s^{m+1} ds \\ &\stackrel{(\text{Polarkoordinaten})}{=} r_m^{-2} \int_{\mathbb{R}^m} A_\infty\left(a, \frac{\|\tau\|_2}{r_m}\right) \|\tau\|_2^2 d\tau \\ &= r_m^{-2} \int_{\mathbb{R}^m} \left( \int_{\langle x, a \rangle_{\mathbb{A}} = \tau} \chi_{(\overline{B}_2(0, r_m))^n}(x) dx \right) \|\tau\|_2^2 d\tau \\ &= r_m^{-2} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^m} \dots \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{(\overline{B}_2(0, r_m))^n}(x) \|\langle x, a \rangle_{\mathbb{A}}\|_2^2 dx}_{n\text{-mal}} \\ &= r_m^{-2} \int_{(\overline{B}_2(0, r_m))^n} \|\langle x, a \rangle_{\mathbb{A}}\|_2^2 dx \\ &\stackrel{(4.30)}{=} \frac{m}{m+2} \end{aligned}$$

und mit dem Lemma 4.6 die Ungleichung

$$\begin{aligned} t^{2m} &= \left( \int_0^\infty f(s) s^{m-1} ds \right)^{m+2} t^{2m} \\ &\stackrel{(4.14)}{\leq} \left( \frac{m+2}{m} \int_0^\infty f(s) s^{m+1} ds \right)^m \left( \int_0^t f(s) s^{m-1} ds \right)^2 \\ &= (V_\infty(a, t))^2. \end{aligned}$$

Wir erhalten also die Ungleichung  $V_\infty(a, t) \geq t^m = V_\infty(v_1, t)$ . Widerspruch!  $\square$

Wie oben schon für die Lemmata 4.1 und 4.2 erläutert wurde, ist die Ungleichung (4.33) für alle  $m \in \mathbb{N}$  auf den Gültigkeitsbereich  $[0, \frac{m+2}{m+3}]$  eingeschränkt. Auch hier ergibt sich diese Einschränkung durch die Konstante aus Ungleichung (4.13). Vermutlich lässt sich der Gültigkeitsbereich für alle weiteren  $m \in \mathbb{N}$ , wie König und Koldobsky ihn für den Fall  $m \in \{1, 2\}$  diskutierten, ausdehnen.



## 4.2 Obere Schranke für Schichten

Im zweiten Teil dieses Kapitels widmen wir uns der oberen Schranke für Schichten. Zunächst beschäftigen wir uns mit dem Grenzwertverhalten des Volumens der Schicht  $V_{\infty, mn}$  senkrecht zu dem Normalenvektor  $v_n$  bzgl.  $n$ . Mit dessen Hilfe können wir im ersten Abschnitt für den Fall  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  für gewisse Schichtbreiten  $t \in \mathbb{R}_{>0}$ , ähnlich wie bei Schichten durch den Ursprung in Korollar 3.24, die Ungleichung (4.1) für fast alle  $n \in \mathbb{N}$  zeigen (siehe Abb. 4.2).

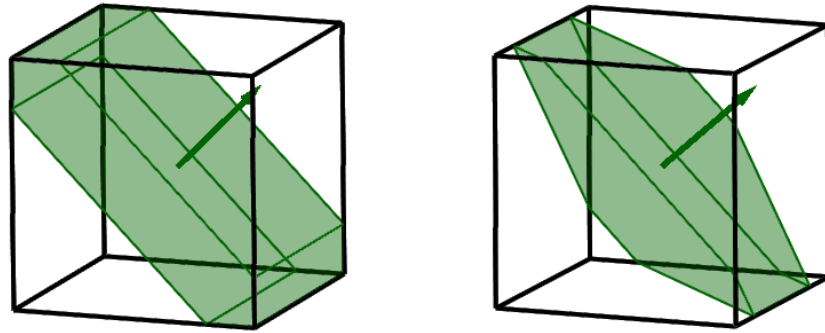


Abbildung 4.2:  $Sl_{\infty}(v_2, \frac{3}{10})$  und  $Sl_{\infty}(v_n, \frac{3}{10})$

Im zweiten Abschnitt untersuchen wir den Fall  $m = 2$ . Hier verhält es sich nicht mehr so wie bei Schnitten durch den Ursprung. Wir finden nämlich für jedes  $t \in \mathbb{R}_{>0}$  ein  $n \in \mathbb{N}$  so, dass die Ungleichung (4.1) gilt. Wie oben diskutiert, nähert sich dieser Fall im Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  dem Fall  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ . Der maximale Normalenvektor ist für diesen Fall für alle  $n \in \mathbb{N}$  also nicht mehr der Vektor  $v_2$  (siehe Abb. 4.3).

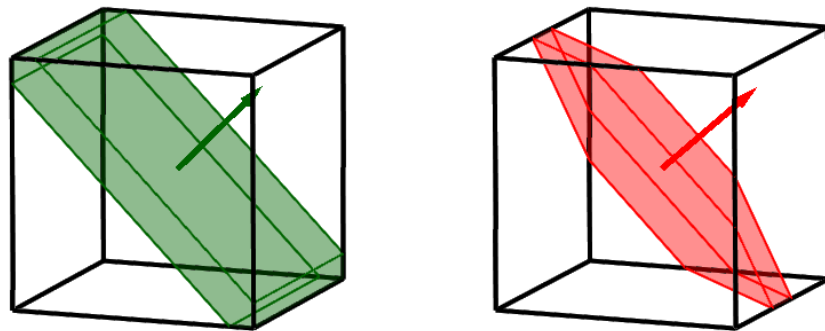


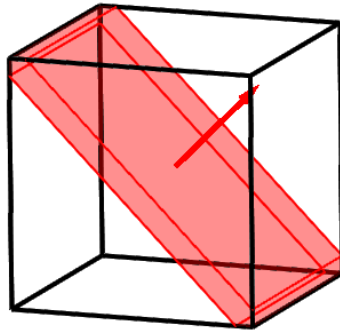
Abbildung 4.3:  $Sl_{\infty}(v_2, \frac{1}{10})$  und  $Sl_{\infty}(v_n, \frac{1}{10})$

Anders ist es für den Fall  $m = 1$ . In diesem Fall ist es so wie bei Schnitten durch den Ursprung. Der maximale Normalenvektor wird für sehr dünne Schichten auch in  $v_2$  angenommen (siehe Abb. 4.4). Wir werden also, wie oben diskutiert, die Ungleichung (4.2) für gewisse Normalenvektoren  $a \in S^{n-1}$  und Schichtdicken  $t \in \mathbb{R}_{>0}$  beweisen.

Der Grenzwert der Folge  $(V_{\infty, mn}(v_n, \cdot))_{n \in \mathbb{N}}$  ist die abgebrochene Gammafunktion. Es ergibt sich dazu der

**Satz 4.9.** Für alle  $m, n \in \mathbb{N}$  und  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  gilt die Identität

$$(4.34) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} V_{\infty, mn}(v_n, t) = \frac{m}{2\Gamma(\frac{m}{2} + 1)} \int_0^{\frac{m+2}{2}t^2} e^{-s} s^{\frac{m}{2}-1} ds.$$

Abbildung 4.4:  $Sl_\infty(v_2, \frac{7}{100})$ 

**Beweis.** Seien  $m, n \in \mathbb{N}$ . Zunächst gilt für alle  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  die Gleichung

$$\begin{aligned}
 \left(j_{\frac{m}{2}}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)\right)^n &\stackrel{[20, S. 297]}{=} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right) \left(\frac{s}{2\sqrt{n}}\right)^{2k}}{k! \Gamma\left(\frac{m}{2} + k + 1\right)}\right)^n \\
 &= \left(1 - \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right) s^2}{4n \Gamma\left(\frac{m}{2} + 2\right)} + \mathcal{O}\left(\frac{s^4}{n^2}\right)\right)^n \\
 &= \left(1 - \frac{s^2}{n(2m+4)} + \mathcal{O}\left(\frac{s^4}{n^2}\right)\right)^n \\
 (4.35) \quad &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{s^2}{2m+4}}.
 \end{aligned}$$

Sei  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Weiter seien  $\psi_m$  wie in Lemma 3.13 und  $t_m$  wie in Lemma 3.5 definiert. Definieren wir für alle  $n \in \mathbb{N}$  die Abbildung

$$g_n : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, s \mapsto \chi_{[0, t_m \sqrt{n}]}(s) e^{-\frac{s^2}{2m+4}} + \chi_{(t_m \sqrt{n}, \infty)}(s) \left(\psi_m\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)\right)^n,$$

so ergibt sich mit Lemma 3.5 für alle  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  die Ungleichung

$$\left|j_{\frac{m}{2}}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)\right|^n |j_{\frac{m}{2}}(ts)| \leq g_n(s).$$

Weiterhin gilt für alle  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  die Identität  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(s) = e^{-\frac{s^2}{2m+4}}$ .

Zu zeigen bleibt, dass die Folge der Integrale bzgl. des Maßes  $s^{m-1} ds$  über  $g_n$  konvergiert. Es gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$  die Ungleichung

$$\begin{aligned}
 &\int_0^\infty g_n(s) s^{m-1} ds \\
 &= \int_0^{t_m \sqrt{n}} e^{-\frac{s^2}{2m+4}} s^{m-1} ds + \int_{t_m \sqrt{n}}^\infty \left(\psi_m\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)\right)^n s^{m-1} ds \\
 &\leq \int_0^{t_m \sqrt{n}} e^{-\frac{s^2}{2m+4}} s^{m-1} ds + \left(\frac{8}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} n^{\frac{m}{2}} \int_{t_m}^\infty \left(s^2 - \frac{m^2}{4}\right)^{-\frac{n}{4}} s^{-\frac{m}{2}n+m-1} ds.
 \end{aligned}$$

Setzen wir  $c_m := \frac{(m+6)^2}{12m+36}$  für alle  $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  und  $c_1 := \frac{t_1^2}{t_1^2 - \frac{1}{4}}$ , so erhalten wir die Aussage

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{8}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} n^{\frac{m}{2}} \int_{t_m}^{\infty} \left(s^2 - \frac{m^2}{4}\right)^{-\frac{n}{4}} s^{-\frac{m}{2}n+m-1} ds \\
& \leq \left(\frac{8}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} n^{\frac{m}{2}} \int_{t_m}^{\infty} \left(\frac{s^2}{c_m}\right)^{-\frac{n}{4}} s^{-\frac{m}{2}n+m-1} ds \\
& = \left(\frac{8}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} c_m^{\frac{n}{4}} n^{\frac{m}{2}} \int_{t_m}^{\infty} s^{-\frac{m+1}{2}n+m-1} ds \\
& = \left(\frac{8}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} c_m^{\frac{n}{4}} n^{\frac{m}{2}} \frac{1}{\frac{m+1}{2}n - m} t_m^{-\frac{m+1}{2}n+m} \\
& \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung dieser konvergiert nach [11, 3.478] die Folge der Integrale  $\left(\int_0^{\infty} g_n(s) s^{m-1} ds\right)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen das Integral  $\int_0^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2m+4}} s^{m-1} ds = \frac{1}{2}(2m+4)^{\frac{m}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)$ . Insgesamt ergibt sich mit dem Satz von Pratt aus [9, S. 258] die Identität

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} V_{\infty, mn}(v_n, t) & \stackrel{(2.2)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{2^m (\Gamma(\frac{m}{2} + 1))^2} t^m \int_0^{\infty} \left(j_{\frac{m}{2}}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)\right)^n j_{\frac{m}{2}}(ts) s^{m-1} ds \right) \\
& \stackrel{(\text{Pratt})}{=} \frac{m}{2^m (\Gamma(\frac{m}{2} + 1))^2} t^m \int_0^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2m+4}} j_{\frac{m}{2}}(ts) s^{m-1} ds \\
& = \frac{m}{2^{\frac{m}{2}} \Gamma(\frac{m}{2} + 1)} t^{\frac{m}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2m+4}} J_{\frac{m}{2}}(ts) s^{\frac{m}{2}-1} ds \\
& \stackrel{[11, 6.631, 5.]}{=} \frac{m}{2 \Gamma(\frac{m}{2} + 1)} \int_0^{\frac{m+2}{2} t^2} e^{-s} s^{\frac{m}{2}-1} ds. \quad \square
\end{aligned}$$

Die Funktinenfolge  $(V_{\infty, mn}(v_n, \cdot))_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert nicht nur punktweise, sondern auch gleichmäßig auf jedem Kompaktum aus  $\mathbb{R}$ . Wir notieren den Sachverhalt in

**Lemma 4.10.** Für alle  $m \in \mathbb{N}$  und  $c \in \mathbb{R}_{>0}$  konvergiert die Funktionenfolge  $(V_{\infty, mn}(v_n, \cdot))_{n \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig auf dem Kompaktum  $[0, c]$  gegen die Funktion  $\frac{m}{2 \Gamma(\frac{m}{2} + 1)} \int_0^{\frac{m+2}{2}(\cdot)^2} e^{-s} s^{\frac{m}{2}-1} ds$ .

**Beweis.** Seien  $m \in \mathbb{N}$  und  $c \in \mathbb{R}_{>0}$ . Zunächst prüfen wir die Voraussetzungen vom Satz von Scheffé aus [9, S. 148]. Aus Gleichung (4.35) entnehmen wir  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(j_{\frac{m}{2}}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = e^{-\frac{s^2}{2m+4}}$ . Weiterhin konvergiert nach Lemma 3.8 (iii) die Folge der Integrale  $\left(\int_0^{\infty} \left(j_{\frac{m}{2}}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)\right)^n s^{m-1} ds\right)_{n \in \mathbb{N}}$

gegen das Integral  $\int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{2m+4}} s^{m-1} ds$ . Es gilt für alle  $t \in [0, c]$  die Ungleichung

$$\begin{aligned}
& \left| V_{\infty, mn}(v_n, t) - \frac{m}{2\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right)} \int_0^{\frac{m+2}{2}t^2} e^{-s} s^{\frac{m}{2}-1} ds \right| \\
&= \left| \frac{m}{2^m (\Gamma(\frac{m}{2} + 1))^2} t^m \left( \int_0^\infty \left( j_{\frac{m}{2}}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) \right)^n j_{\frac{m}{2}}(ts) s^{m-1} ds - \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{2m+4}} j_{\frac{m}{2}}(ts) s^{m-1} ds \right) \right| \\
&\leq \frac{m}{2^m (\Gamma(\frac{m}{2} + 1))^2} t^m \int_0^\infty \left| \left( j_{\frac{m}{2}}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) \right)^n - e^{-\frac{s^2}{2m+4}} \right| |j_{\frac{m}{2}}(ts)| s^{m-1} ds \\
&\leq \frac{m}{2^m (\Gamma(\frac{m}{2} + 1))^2} c^m \int_0^\infty \left| \left( j_{\frac{m}{2}}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) \right)^n - e^{-\frac{s^2}{2m+4}} \right| s^{m-1} ds.
\end{aligned}$$

Das letzte Integral konvergiert nach dem Satz von Scheffé gegen 0 für  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

### 4.2.1 Obere Schranke für Schichten in $l_\infty^n(l_2^m)$

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit Schichten für den Fall  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ . Wie oben erläutert, ist der Gegenstand der Betrachtung das Volumen der Schicht senkrecht zum Normalenvektor  $v_n$ . Wir werden zeigen, dass dieses Volumen für fast alle  $n \in \mathbb{N}$  größer als das Schichtvolumen senkrecht zum Normalenvektor  $v_2$  ist. Diese Aussage scheint eine natürliche Folge der entsprechenden Aussage für Schnitte durch den Ursprung in (3.24) zu sein.

Hierzu sei noch angemerkt, dass sich der Fall  $m = 1$  nicht nur für Schnitte, sondern auch für Schichten von dem Fall  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  unterscheidet.

Zunächst stellen wir eine Relation zwischen dem Grenzwert der Folge  $(V_{\infty, mn}(v_n, \cdot))_{n \in \mathbb{N}}$  und dem Volumen der Schicht senkrecht zu  $v_2$  her. Für den Beweis dieser Relation nutzen wir die gleichmäßige Konvergenz der Folge auf Kompakta aus.

**Satz 4.11 (Hauptsatz).** Seien  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Definieren wir die Folgeglieder

$$t_m := \sqrt{\frac{m \log\left(\frac{m+2}{4}\right) - 2 \log\left(\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right)\right)}{m+2}}, \text{ so gilt:}$$

- (i) Die Folge  $(t_m)_{m \in \mathbb{N}_{\geq 3}}$  ist streng monoton wachsend mit  $t_3 \approx 0.1414672495$  und es gilt die Identität

$$(4.36) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} t_m = \sqrt{1 - \log(2)} \approx 0.5539429749.$$

- (ii) Für alle  $t \in (0, t_m]$  ist

$$(4.37) \quad V_{\infty, mn}(v_2, t) < \lim_{n \rightarrow \infty} V_{\infty, mn}(v_n, t) = \frac{m}{2\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right)} \int_0^{\frac{m+2}{2}t^2} e^{-s} s^{\frac{m}{2}-1} ds.$$

**Beweis.** (i) Es gelten die Ungleichungen

$$\begin{aligned}
 & t_m < t_{m+1} \\
 \Leftrightarrow & \log \left( \frac{\left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{m}{m+2}}}{\left(\frac{m+3}{4}\right)^{\frac{m+1}{m+3}}} \right) < \log \left( \frac{\left(\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)\right)^{\frac{2}{m+2}}}{\left(\Gamma\left(\frac{m+3}{2}\right)\right)^{\frac{2}{m+3}}} \right) \\
 \Leftrightarrow & \left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{m}{m+2}} \left(\Gamma\left(\frac{m+3}{2}\right)\right)^{\frac{2}{m+3}} < \left(\frac{m+3}{4}\right)^{\frac{m+1}{m+3}} \left(\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)\right)^{\frac{2}{m+2}}.
 \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung folgt mit der Stirling-Formel aus der Ungleichung

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{m}{m+2}} \left(\Gamma\left(\frac{m+3}{2}\right)\right)^{\frac{2}{m+3}} \\
 & < \left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{m}{m+2}} (2\pi)^{\frac{1}{m+3}} \left(\frac{m+3}{2}\right)^{\frac{m+2}{m+3}} e^{-1} e^{\frac{1}{3(m+3)^2}} \\
 (4.38) \quad & < \left(\frac{m+3}{4}\right)^{\frac{m+1}{m+3}} (2\pi)^{\frac{1}{m+2}} \left(\frac{m+2}{2}\right)^{\frac{m+1}{m+2}} e^{-1} \\
 & < \left(\frac{m+3}{4}\right)^{\frac{m+1}{m+3}} \left(\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)\right)^{\frac{2}{m+2}}.
 \end{aligned}$$

Die Ungleichung (4.38) ist äquivalent zu der Ungleichung

$$(m+3)^{\frac{1}{m+3}} 2^{\frac{4}{m+3}} e^{\frac{1}{3(m+3)^2}} < (m+2)^{\frac{1}{m+2}} 2^{\frac{4}{m+2}} \pi^{\frac{1}{(m+2)(m+3)}}.$$

Für den zweiten Teil der Behauptung (i) betrachten wir mit der Stirling-Formel die Ungleichungen

$$\begin{aligned}
 t_m & < \sqrt{\log \left( \frac{e}{\pi^{\frac{1}{m+2}} (m+2)^{\frac{1}{m+2}} 2^{1-\frac{2}{m+2}}} \right)} & \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \sqrt{1 - \log(2)} & \text{und} \\
 t_m & > \sqrt{\log \left( \frac{e}{\pi^{\frac{1}{m+2}} (m+2)^{\frac{1}{m+2}} 2^{1-\frac{2}{m+2}} e^{\frac{1}{3(m+2)^2}}} \right)} & \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \sqrt{1 - \log(2)}.
 \end{aligned}$$

(ii) Sei  $t \in [0, t_m]$ . Zunächst gilt die Ungleichung

$$(4.39) \quad V_\infty(v_2, t) \leq t^m A_\infty(v_2, 0) \stackrel{(\text{Satz 3.3})}{=} t^m 2^{\frac{m}{2}}.$$

Zu zeigen bleibt die Ungleichung  $2^{\frac{m}{2}} t^m \leq \frac{m}{2\Gamma(\frac{m}{2}+1)} \int_0^{\frac{m+2}{2}t^2} e^{-s} s^{\frac{m}{2}-1} ds$ .

Für  $t = 0$  erhalten wir die Gleichheit in der zu zeigenden Ungleichung. Weiter betrachten

wir die Ableitungen der Funktionen in der Ungleichung und erhalten

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left( 2^{\frac{m}{2}} t^m \right) &\leq \frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2 \Gamma(\frac{m}{2} + 1)} \int_0^{\frac{m+2}{2} t^2} e^{-s} s^{\frac{m}{2}-1} ds \right) \\
 \Leftrightarrow m 2^{\frac{m}{2}} t^{m-1} &\leq \frac{m(m+2)}{2 \Gamma(\frac{m}{2} + 1)} e^{-\frac{m+2}{2} t^2} \left( \frac{m+2}{2} \right)^{\frac{m}{2}-1} t^{m-1} \\
 \Leftrightarrow 1 &\leq \frac{(m+2)^{\frac{m}{2}}}{2^m \Gamma(\frac{m}{2} + 1)} e^{-\frac{m+2}{2} t^2}.
 \end{aligned}$$

Offensichtlich ist die Funktion  $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{(m+2)^{\frac{m}{2}}}{2^m \Gamma(\frac{m}{2} + 1)} e^{-\frac{m+2}{2} t^2}$  streng monoton fallend mit  $g(t_m) = 1$ .  $\square$

Der Gültigkeitsbereich der Ungleichung (4.37) ist nicht maximal. Dazu beweisen wir für den Fall  $m = 3$  den

**Satz 4.12.** Seien  $m = 3, n \in \mathbb{N}$  und  $\tau_m \approx 0.547133564$  die positive reelle Nullstelle des Polynoms  $\frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (5\sqrt{5} - 6\sqrt{\pi}) + \frac{9}{4} x - \frac{5}{2} \sqrt{\frac{10}{\pi}} x^2 - \frac{1}{4} x^3$ . Es gilt für alle  $t \in (0, \tau_m]$  die Ungleichung

$$(4.40) \quad V_{\infty, mn}(v_2, t) < \lim_{n \rightarrow \infty} V_{\infty, mn}(v_n, t) = \frac{m}{2 \Gamma(\frac{m}{2} + 1)} \int_0^{\frac{m+2}{2} t^2} e^{-s} s^{\frac{m}{2}-1} ds.$$

**Beweis.** Sei  $t \in (0, \tau_m]$ . Zunächst gilt die Identität

$$V_{\infty}(v_2, t) = \frac{1}{4} t^3 (t^3 - 9t + 8\sqrt{2}).$$

Weiterhin ergibt sich die Ungleichung

$$\begin{aligned}
 \frac{m}{2 \Gamma(\frac{m}{2} + 1)} \int_0^{\frac{m+2}{2} t^2} e^{-s} s^{\frac{m}{2}-1} ds &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{5}{2} t^2} e^{-s} s^{\frac{1}{2}} ds \\
 &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{5}{2} \right)^{\frac{3}{2}} t^3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 5^k t^{2k}}{2^k k! (k + \frac{3}{2})} \\
 &> \frac{5}{2} \sqrt{\frac{10}{\pi}} t^3 \left( \frac{2}{3} - t^2 \right).
 \end{aligned}$$

Zu zeigen haben wir nun die Ungleichung

$$\frac{1}{4} t^3 (t^3 - 9t + 8\sqrt{2}) \leq \frac{5}{2} \sqrt{\frac{10}{\pi}} t^3 \left( \frac{2}{3} - t^2 \right).$$

Diese gilt, da  $\frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (5\sqrt{5} - 6\sqrt{\pi}) + \frac{9}{4} x - \frac{5}{2} \sqrt{\frac{10}{\pi}} x^2 - \frac{1}{4} x^3 \geq 0$  auf  $(0, \tau_m]$  ist.  $\square$

Durch dieses Vorgehen haben wir den Gültigkeitsbereich der Ungleichung (4.37) aus Satz 4.11 im Satz 4.12 für den Fall  $m = 3$  vergrößert. Jedoch ist dieser vergrößerte Bereich immer noch nicht maximal, da numerische Berechnungen eine zulässige Schichtdicke von 0.9991141860 suggerieren.

Für die Schichtdicken aus Satz 4.11 formulieren wir das Hauptresultat dieses Abschnittes, das uns an die Ungleichung (3.46) aus Kapitel drei erinnert.

**Korollar 4.13.** *Seien  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  und  $t_m$  wie in Satz 4.11 definiert. Es gilt für alle  $t \in [0, t_m]$  und für fast alle  $n \in \mathbb{N}$  die Ungleichung*

$$(4.41) \quad V_{\infty, mn}(v_2, t) \leq V_{\infty, mn}(v_n, t).$$

**Beweis.** Nach Korollar 3.24 existiert ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  so, dass für alle  $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$  die Ungleichung

$$A_{\infty}(v_2, 0) < A_{\infty}(v_n, 0)$$

gilt. Da die Funktionen  $A_{\infty}(v_2, \cdot)$  und  $A_{\infty}(v_n, \cdot)$  stetig auf  $\mathbb{R}$  sind, existiert ein  $c \in \mathbb{R}_{>0}$  so, dass für alle  $t \in (-c, c)$  die Ungleichung

$$A_{\infty}(v_2, t) < A_{\infty}(v_n, t)$$

gilt. Daraus ergibt sich für alle  $t \in [0, c)$  die Ungleichung

$$V_{\infty}(v_2, t) < V_{\infty}(v_n, t).$$

Der Satz 4.11(ii) liefert uns die Abschätzung  $0 < \varepsilon := \inf_{t \in [c, t_m]} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} V_{\infty, mn}(v_n, t) - V_{\infty}(v_2, t) \right)$ . Damit existiert ein  $n'_0 \in \mathbb{N}$  so, dass wir die Ungleichung

$$V_{\infty}(v_2, t) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} V_{\infty, mn}(v_n, t) - \varepsilon < V_{\infty}(v_n, t)$$

für alle  $t \in [c, t_m]$  und  $n \in \mathbb{N}_{\geq n'_0}$  erhalten. □

## 4.2.2 Obere Schranke für Schichten in $l_{\infty}^n(l_2^2)$

In diesem Abschnitt stellen wir uns die Frage, ob wir im Fall  $m = 2$  für das Volumen  $V_{\infty}$ , wie schon für Schnitte durch den Ursprung, eine obere Schranke für gewisse Schichtbreiten finden können. Denkbar wäre nach dem Beweis der Abschätzung der Schnitte durch den Ursprung, dass es sich für sehr dünne Schichten genauso verhält. Bei Schnitten wurde die Schranke senkrecht zum Normalenvektor  $v_2$  angenommen. Wenn es also eine Schranke für Schichten gibt, wird sie angenommen? Liegt sie dann auch in der selben Richtung wie bei Schnitten? Wie oben angedeutet werden wir feststellen, dass dieser Fall sich dem Fall  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  für  $n \rightarrow \infty$  annähert. Was das genau bedeutet, klären wir in den nächsten Schritten.

**Lemma 4.14.** *Für alle  $s \in [0, \frac{51}{100}]$  gilt die Ungleichung*

$$(4.42) \quad \arcsin(s) \leq s + \frac{s^3}{2}.$$

**Beweis.** Sei  $s \in [0, \frac{51}{100}]$ . Nach dem Lagrange-Restglied existiert ein  $\xi \in (0, s)$  so, dass wir die Gleichung

$$\arcsin(s) = s + \frac{1}{6}s^3 + \frac{8\xi^4 + 24\xi^2 + 3}{40(1 - \xi^2)^{\frac{9}{2}}}s^5$$

erhalten. Daraus und den Fakten, dass die Funktion  $\xi \mapsto \frac{8\xi^4 + 24\xi^2 + 3}{40(1 - \xi^2)^{\frac{9}{2}}}$  monoton steigend auf dem Intervall  $[0, \frac{51}{100}]$  ist, erhalten wir die Ungleichung

$$\begin{aligned} \arcsin(s) &\leq s + \frac{1}{6}s^3 + \frac{8\left(\frac{51}{100}\right)^4 + 24\left(\frac{51}{100}\right)^2 + 3}{40\left(1 - \left(\frac{51}{100}\right)^2\right)^{\frac{9}{2}}}s^5 \\ &< s + \frac{1}{6}s^3 + \frac{19}{20}s^5. \end{aligned}$$

Weiterhin gelten die Aussagen

$$\begin{aligned} s + \frac{1}{6}s^3 + \frac{19}{20}s^5 &\leq s + \frac{s^3}{2} \\ \Leftrightarrow 0 &\leq \frac{2}{3} - \frac{19}{20}s^2 \\ \Leftrightarrow s &\in \left[-\frac{2\sqrt{285}}{57}, \frac{2\sqrt{285}}{57}\right]. \end{aligned}$$

Es gilt die Ungleichung  $\frac{51}{100} < \frac{2\sqrt{285}}{57}$ . □

Die Aussage, die im nächsten Lemma bewiesen wird, ist eine Verschärfung der Ungleichung (3.11) für den Fall  $m = 2$  aus Lemma 3.5.

**Lemma 4.15.** Für alle  $s \in [0, \frac{19}{10}]$  gilt die Ungleichung

$$(4.43) \quad e^{-\frac{s^2}{8} - \frac{s^4}{324}} \leq j_1(s).$$

**Beweis.** Sei  $s \in [0, \frac{19}{10}]$ . Setzen wir die Abbildungen  $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}, s \mapsto j_1(s) e^{\frac{s^2}{8} + \frac{s^4}{324}}$  und  $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}, s \mapsto f'(s) e^{-\frac{s^2}{8} - \frac{s^4}{324}}$ , so erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} g(s) &= J_1(s) \left( \frac{1}{2} + \frac{2}{81}s^2 \right) - J_2(s) \frac{2}{s} \\ &\approx \frac{s^3}{238878720} \left( 460800 - 213120s^2 + 11472s^4 - 239s^6 + 4s^8 \right). \end{aligned}$$

Die Funktion  $g$  hat im Intervall  $(0, \frac{19}{10}]$  genau eine Nullstelle  $t_0 \approx 1.572616313$ . Damit ist  $g$  positiv auf dem Intervall  $(0, t_0]$  und negativ auf dem Intervall  $(t_0, \frac{19}{10}]$ . Weiterhin gilt  $f(0) = 1$  und  $f(\frac{19}{10}) > 1$ . □

Am Anfang dieses Abschnittes wurde erklärt, dass sich der Fall  $m = 2$  für  $n \rightarrow \infty$  dem Fall  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  annähert. Für Schichten  $V_{\infty, mn}$  ab einer gewissen Dicke, d. h. größer als  $\frac{1}{n}$ , können wir das Volumen der Schicht senkrecht zu  $v_2$  durch das senkrecht zu  $v_n$  abschätzen. Wir können also diese Abschätzung nicht für beliebig dünne Schichten betrachten. Der folgende Satz ist eine Verbesserung des Satzes von König und Koldobsky aus [18, S. 3].



**Satz 4.16** (Hauptsatz). *Seien  $m = 2$  und  $n \in \mathbb{N}_{\geq 18}$ . Es gilt für alle  $t \in [\frac{1}{n}, \frac{5}{11}]$  die Ungleichung*

$$(4.44) \quad V_{\infty, mn}(v_2, t) \leq V_{\infty, mn}(v_n, t).$$

**Beweis.** Sei  $t \in [\frac{1}{n}, \frac{5}{11}]$ . Es gilt zunächst mit  $\sqrt{2-t^2} \geq \sqrt{2} - \frac{t^2}{\sqrt{2}}$  die Ungleichung

$$\begin{aligned}
 & V_{\infty}(v_2, t) \\
 \stackrel{(2.2)}{=} & \frac{t^2}{2} \int_0^{\infty} \left( j_1\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) \right)^2 j_1(ts) s ds \\
 = & 8t \int_0^{\infty} \left( J_1\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) \right)^2 J_1(ts) s^{-2} ds \\
 = & 2t^2 - \pi^{-1} \sqrt{2-t^2} t(1+t^2) + 2\pi^{-1} \arcsin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) (1-2t^2) \\
 \stackrel{(\text{Lemma 4.14})}{\leq} & 2t^2 - \pi^{-1} \left( \sqrt{2} - \frac{t^2}{\sqrt{2}} \right) t(1+t^2) + 2\pi^{-1} \left( \frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{t^3}{4\sqrt{2}} \right) (1-2t^2) \\
 (4.45) \quad = & 2t^2 - \frac{9\sqrt{2}}{4\pi} t^3.
 \end{aligned}$$

Weiter gilt die Identität

$$\begin{aligned}
 V_{\infty}(v_n, t) & \stackrel{(2.2)}{=} \frac{t^2}{2} \int_0^{\infty} \left( j_1\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) \right)^n j_1(ts) s ds \\
 = & \frac{t^2}{2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{s^2}{8}} j_1(ts) s ds - \frac{t^2}{2} \int_0^{\infty} \left( e^{-\frac{s^2}{8}} - \left( j_1\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) \right)^n \right) j_1(ts) s ds \\
 = & t \int_0^{\infty} e^{-\frac{s^2}{8}} J_1(ts) ds - \frac{t^2}{2} \int_0^{\infty} \left( e^{-\frac{s^2}{8}} - \left( j_1\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) \right)^n \right) j_1(ts) s ds \\
 \stackrel{[11, 6.631, 5.]}{=} & 1 - e^{-2t^2} - \frac{t^2}{2} \int_0^{\infty} \left( e^{-\frac{s^2}{8}} - \left( j_1\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) \right)^n \right) j_1(ts) s ds.
 \end{aligned}$$

In den nächsten Schritten schätzen wir das Integral  $\frac{t^2}{2} \int_0^{\infty} \left( e^{-\frac{s^2}{8}} - \left( j_1\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) \right)^n \right) j_1(ts) s ds$  ab.

Wir erhalten mit der Abschätzung  $j_1(s) \leq 1$  für alle  $s \in \mathbb{R}_{>0}$  die Ungleichung

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{t^2}{2} \int_0^{\infty} \left( e^{-\frac{s^2}{8}} - \left( j_1\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) \right)^n \right) j_1(ts) s ds \right| \\
 \leq & \frac{t^2}{2} \int_0^{\infty} \left| e^{-\frac{s^2}{8}} - \left( j_1\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) \right)^n \right| |j_1(ts)| s ds \\
 \stackrel{(4.43)}{\leq} & \frac{t^2}{2} \int_0^{\frac{19}{10}\sqrt{n}} \left| e^{-\frac{s^2}{8}} - e^{-\frac{s^2}{8} - \frac{s^4}{324n}} \right| s ds + \frac{t^2}{2} \int_{\frac{19}{10}\sqrt{n}}^{\infty} \left| e^{-\frac{s^2}{8}} - \left( j_1\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) \right)^n \right| s ds
 \end{aligned}$$

$$(4.46) \quad \leq \underbrace{\frac{t^2}{2} \int_0^\infty \frac{s^5}{324n} e^{-\frac{s^2}{8}} ds}_{=\frac{64}{81n}t^2} + \underbrace{\frac{t^2}{2} \int_{\frac{19}{10}\sqrt{n}}^\infty e^{-\frac{s^2}{8}} s ds}_{=2t^2 e^{-\frac{361}{800}n}} + \frac{t^2}{2} \int_{\frac{19}{10}\sqrt{n}}^\infty \left| j_1\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) \right|^n s ds.$$

Bevor wir das dritte Integral in (4.46) weiter abschätzen, notieren wir für alle  $s \in \mathbb{R}_{>0}$  die Ungleichung

$$(4.47) \quad |j_1(s)| \leq \min\left(1, \frac{1.66}{t^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Diese Ungleichung ergibt sich aus dem asymptotischen Verhalten der Funktion  $J_1$  und der Tatsache, dass die Funktion  $\mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, s \mapsto \sqrt{s} |J_1(s)|$  eine monoton fallende Folge  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Maxima besitzt mit  $M_1 < 0.83$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ .

Wir erhalten für alle  $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} \frac{t^2}{2} \int_{\frac{19}{10}\sqrt{n}}^\infty \left| j_1\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) \right|^n s ds &= \frac{t^2}{2} n \int_{\frac{19}{10}}^\infty |j_1(s)|^n s ds \\ &\stackrel{(4.47)}{\leq} \frac{t^2}{2} n \int_{\frac{19}{10}}^\infty \left(\frac{1.66}{t^{\frac{3}{2}}}\right)^n s ds \\ &= 3.61 \left(\frac{83\sqrt{190}}{1805}\right)^n \frac{n}{3n-4} t^2 \\ &\leq 2t^2 e^{-\frac{361}{800}n}. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir für alle  $n \in \mathbb{N}_{\geq 18}$  die Ungleichung

$$(4.48) \quad V_\infty(v_n, t) \geq 1 - e^{-2t^2} - \left(\frac{64}{81} + 4ne^{-\frac{361}{800}n}\right) \frac{t^2}{n} > 1 - e^{-2t^2} - 0.8115 \frac{t^2}{n}.$$

Mit den Ungleichungen  $1 - e^{-2t^2} \geq 2t^2 - 2t^4$ , (4.45) und (4.48) erhalten wir die Aussagen

$$\begin{aligned} 2t^2 - \frac{9\sqrt{2}}{4\pi} t^3 &\leq 2t^2 - 2t^4 - 0.8115 \frac{t^2}{n} \\ \Leftrightarrow 0 &\geq t^2 - \frac{9\sqrt{2}}{8\pi} t + \frac{0.8115}{2n} \\ \Leftrightarrow t &\in \left[ \frac{9\sqrt{2}}{16\pi} - \sqrt{\frac{81}{128\pi^2} - \frac{1623}{4000n}}, \frac{9\sqrt{2}}{16\pi} + \sqrt{\frac{81}{128\pi^2} - \frac{1623}{4000n}} \right]. \end{aligned}$$

Es gelten für alle  $n \in \mathbb{N}_{\geq 18}$  die Ungleichung  $\frac{1}{n} \leq \frac{9\sqrt{2}}{16\pi} - \sqrt{\frac{81}{128\pi^2} - \frac{1623}{4000n}}$  und die Ungleichung

$$\frac{5}{11} < 0.457 < \frac{9\sqrt{2}}{16\pi} + \sqrt{\frac{81}{128\pi^2} - \frac{1623}{4000n}}. \quad \square$$

Nach Satz 4.16 wächst der Gültigkeitsbereich der Ungleichung (4.44) mit der Dimension. Im nächsten Satz vergrößern wir den Bereich nach oben, indem wir  $c := \frac{9\sqrt{2}}{8\pi} \approx 0.5064279276$  setzen. Dann gilt die Ungleichung (4.44) sogar für den Bereich  $[\frac{1}{n}, c]$ . Für den Beweis der Erweiterung nutzen wir die gleichmäßige Konvergenz der Folge  $(V_{\infty, mn}(v_n, \cdot))_{n \in \mathbb{N}}$  aus.

**Satz 4.17.** Seien  $m = 2$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Setzen wir  $c := \frac{9\sqrt{2}}{8\pi}$ , so gilt für alle  $t \in (0, c]$  die Ungleichung

$$(4.49) \quad V_\infty(v_2, t) < \lim_{n \rightarrow \infty} V_{\infty, mn}(v_n, t) = \frac{m}{2\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right)} \int_0^{\frac{m+2}{2}t^2} e^{-s} s^{\frac{m}{2}-1} ds.$$

**Beweis.** Sei  $t \in (0, c]$ . Es ergibt sich aus der Abschätzung (4.45) die Ungleichung

$$V_\infty(v_2, t) < 2t^2 - \frac{9\sqrt{2}}{4\pi} t^3.$$

Außerdem gilt für  $m = 2$  die Ungleichung

$$\frac{m}{2\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right)} \int_0^{\frac{m+2}{2}t^2} e^{-s} s^{\frac{m}{2}-1} ds = \int_0^{2t^2} e^{-s} ds = 1 - e^{-2t^2} < 2t^2 - 2t^4.$$

Zu zeigen bleibt die Abschätzung

$$0 < 2t^2 - 2t^4 - \left(2t^2 - \frac{9\sqrt{2}}{4\pi} t^3\right) = \frac{9\sqrt{2}}{4\pi} t^3 - 2t^4.$$

Diese folgt aber aus der Ungleichung  $t < \frac{9\sqrt{2}}{8\pi} = c$ . □

Kombinieren wir die beiden Sätze 4.16 und 4.17, so erhalten wir das oben diskutierte Resultat.

**Satz 4.18.** Seien  $m = 2$  und  $c$  wie in Satz 4.17 definiert. Es gilt für alle  $t \in \left[\frac{1}{n}, c\right]$  und für fast alle  $n \in \mathbb{N}$  die Ungleichung

$$(4.50) \quad V_{\infty, mn}(v_2, t) \leq V_{\infty, mn}(v_n, t).$$

**Beweis.** Nach Satz 4.16 gilt für alle  $n \in \mathbb{N}_{\geq 18}$  und  $t \in \left[\frac{1}{n}, \frac{5}{11}\right]$  die Ungleichung

$$V_\infty(v_2, t) \leq V_\infty(v_n, t).$$

Der Satz 4.17 liefert uns die Abschätzung  $0 < \varepsilon := \inf_{t \in \left[\frac{5}{11}, c\right]} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} V_{\infty, mn}(v_n, t) - V_\infty(v_2, t) \right)$ .

Damit existiert ein  $n_0 \in \mathbb{N}_{\geq 18}$  so, dass wir die Ungleichung

$$V_\infty(v_2, t) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} V_{\infty, mn}(v_n, t) - \varepsilon < V_\infty(v_n, t)$$

für alle  $t \in \left[\frac{5}{11}, c\right]$  und  $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$  erhalten. □

### 4.2.3 Obere Schranke für Schichten in $l_\infty^n(l_2^1)$

In diesem Abschnitt betrachten wir Schichten für den Fall  $m = 1$ . Das ist der einzige Fall, für den wir eine obere Schranke für die Volumenformel  $V_\infty$  angeben können. Nicht nur im Falle  $m = 2$ , sondern auch hier könnten wir annehmen, dass die obere Schranke für sehr dünne Schichten in der gleichen Richtung wie für Schnitte durch den Ursprung liegt. Dies ist auch der Fall, denn der maximale Normalenvektor ist für sehr dünne Schichten gleich  $v_2$ .

Der nachstehende Satz gibt uns einen Hinweis, wie dünn bzw. dick die Schichten sein dürfen. Im Gegensatz zu den anderen Fällen beweisen wir insbesondere, dass der Grenzwert der Folge  $(V_{\infty, mn}(v_n, t))_{n \in \mathbb{N}}$  für gewisse  $t > 0$  kleiner ist als das Volumen der Schicht senkrecht zu  $v_2$ .

**Satz 4.19.** Seien  $m = 1$  und  $n \in \mathbb{N}$  sowie  $\tau_m \approx 0.07152824377$  die positive reelle Nullstelle des Polynoms  $\sqrt{2} - \sqrt{\frac{6}{\pi}} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{\pi}}x^2 - \frac{9}{40}\sqrt{\frac{6}{\pi}}x^4$ . Es gilt für alle  $t \in (0, \tau_m]$  die Ungleichung

$$(4.51) \quad \frac{m}{2\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right)} \int_0^{\frac{m+2}{2}t^2} e^{-s} s^{\frac{m}{2}-1} ds = \lim_{n \rightarrow \infty} V_{\infty, mn}(v_n, t) < V_{\infty}(v_2, t).$$

**Beweis.** Sei  $t \in (0, \tau_m]$ . Zunächst gilt die Identität

$$V_{\infty}(v_2, t) = t \left( \sqrt{2} - \frac{t}{2} \right).$$

Weiter erhalten wir für  $m = 1$  die Ungleichung

$$\begin{aligned} \frac{m}{2\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right)} \int_0^{\frac{m+2}{2}t^2} e^{-s} s^{\frac{m}{2}-1} ds &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}t} e^{-s^2} ds \\ &= \sqrt{\frac{6}{\pi}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)j!} \left(\frac{3}{2}\right)^j t^{2j+1} \\ &< \sqrt{\frac{6}{\pi}} \left( t - \frac{1}{2}t^3 + \frac{9}{40}t^5 \right). \end{aligned}$$

Die nun noch zu zeigende Ungleichung  $\sqrt{\frac{6}{\pi}} \left( t - \frac{1}{2}t^3 + \frac{9}{40}t^5 \right) < t \left( \sqrt{2} - \frac{t}{2} \right)$ , ergibt sich aus der Wahl von  $t$  und der Abschätzung  $0 < \sqrt{2} - \sqrt{\frac{6}{\pi}} - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{\pi}}t^2 - \frac{9}{40}\sqrt{\frac{6}{\pi}}t^4$ .  $\square$

Aus der oberen Abschätzung der Schnitte durch den Ursprung für den Fall  $m = 1$  von Ball können wir eine obere Abschätzung für immer dünner werdende Schichten ableiten. Das nächste Korollar deutet schon darauf hin, dass wir das Volumen der Schicht nur für die Normalenvektoren abschätzen können, die einen gewissen Abstand zu  $v_2$  besitzen.

**Korollar 4.20.** Seien  $m = 1$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Weiter seien  $a \in S^{n-1}$  mit  $1 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n \geq 0$  und  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ . Es existiert ein  $c_{\varepsilon} \in \mathbb{R}_{>0}$  so, dass die Ungleichung

$$(4.52) \quad V_{\infty, mn}(a, t) < V_{\infty, mn}(v_2, t)$$

für alle  $t \in [0, c_{\varepsilon}]$  und  $a \notin B_2(v_2, \varepsilon)$  gilt. Insbesondere gilt die Identität  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c_{\varepsilon} = 0$ .

**Beweis.** Ball zeigte in [3, S. 465-473] für alle  $a \neq v_2$  die Ungleichung  $A_{\infty}(a, 0) < A_{\infty}(v_2, 0)$ . Aus der Stetigkeit der Abbildung  $A_{\infty}(\cdot, 0)$  ergibt sich die folgende Ungleichung:  $0 < c_{\varepsilon} := \min_{a \notin B_2(v_2, \varepsilon)} (A_{\infty}(v_2, 0) - A_{\infty}(a, 0))$ . Damit gilt für alle  $t \in [0, c_{\varepsilon}]$  und  $a \notin B_2(v_2, \varepsilon)$  die Ungleichung

$$A_{\infty}(a, t) \leq A_{\infty}(a, 0) < A_{\infty}(v_2, 0) - c_{\varepsilon} < A_{\infty}(v_2, 0) - t \stackrel{(\text{Satz 3.3})}{=} \sqrt{2} - t = A_{\infty}(v_2, t).$$

Mit dem Cavalierischen Prinzip bekommen wir insgesamt für alle  $t \in [0, c_{\varepsilon}]$  und  $a \notin B_2(v_2, \varepsilon)$  die Ungleichung  $V_{\infty}(a, t) < V_{\infty}(v_2, t)$ .  $\square$

Auf den Sachverhalt von Korollar 4.20 wollen wir in den nächsten Sätzen näher eingehen. Dort ist unklar, welchen Wert  $c_\varepsilon$  annimmt. Damit wir annähernd die Schichtdicke von 0.07152824377 aus Satz 4.19 betrachten können, werden wir nur Normalenvektoren mit einem gewissen aber möglichst kleinem Abstand von  $v_2$  zulassen. Dazu teilen wir die Menge der Normalenvektoren in zwei Mengen auf. Im ersten Fall soll  $a_1 \in \left[0, \sqrt{\frac{6}{13}}\right]$  und im zweiten Fall ist  $a_1 \in [0.7254492804, 1]$ . Wie die Zahl 0.7254492804 zustande kommt, wird später einsichtig. Bevor wir uns mit dem ersten Fall beschäftigen, ist anzumerken, dass eine sehr kleine Umgebung um  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  vernachlässigt wird.

**Satz 4.21** (Hauptsatz). *Seien  $m = 1$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Des Weiteren seien  $a \in S^{n-1}$  mit  $\sqrt{\frac{6}{13}} \geq a_1 \geq \dots \geq a_n \geq 0$  und  $t_0 \approx 0.07151488513$ , die kleinste positive Nullstelle des Polynoms  $x^4 - 4\sqrt{2}x^3 + 9x^2 - 4\sqrt{2}x + 8 - \frac{24}{\pi}$ . Es gilt für alle  $t \in (0, t_0]$  die Ungleichung*

$$(4.53) \quad V_{\infty, mn}(a, t) \leq V_{\infty, mn}(v_2, t) = t \left( \sqrt{2} - \frac{t}{2} \right).$$

**Beweis.** Sei  $t \in (0, t_0]$ . Setzen wir  $q_0 := \frac{1}{t^2}$  und  $q_j := \frac{1}{a_j^2}$  sowie  $p_j := q_j(1 + t^2)$  für alle  $j \in \mathbb{N}_{\leq n}$ , so erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n \frac{1}{q_j} &= t^2 + \sum_{j=1}^n \frac{1}{q_j} = t^2 + \|a\|_2^2 = t^2 + 1 \quad \text{und} \\ \sum_{j=0}^n \frac{1}{p_j} &= \sum_{j=0}^n \frac{1}{q_j(1 + t^2)} = \frac{1}{1 + t^2} \sum_{j=0}^n \frac{1}{q_j} = 1. \end{aligned}$$

Weiterhin gilt für alle  $j \in \mathbb{N}_{\leq n}$  die Abschätzung

$$p_j = q_j(1 + t^2) = \frac{1}{a_j^2}(1 + t^2) \geq \frac{1}{a_1^2}(1 + t^2) \geq \frac{13}{6}(1 + t^2) > \frac{13}{6}.$$

Damit und mit der allgemeinen Hölder-Ungleichung erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} V_\infty(a, t) &\stackrel{(2.2)}{=} \frac{2}{\pi} t \int_0^\infty \left( \prod_{j=1}^n j_{\frac{1}{2}}(a_j s) \right) j_{\frac{1}{2}}(ts) ds \\ &\leq \frac{2}{\pi} t \int_0^\infty \left| \left( \prod_{j=1}^n j_{\frac{1}{2}}(a_j s) \right) j_{\frac{1}{2}}(ts) \right| ds \\ &\leq \frac{2}{\pi} t \left( \prod_{j=1}^n \left( \int_0^\infty |j_{\frac{1}{2}}(a_j s)|^{p_j} ds \right)^{\frac{1}{p_j}} \right) \left( \int_0^\infty |j_{\frac{1}{2}}(ts)|^{p_0} ds \right)^{\frac{1}{p_0}} \\ &= \frac{2}{\pi} t \left( \prod_{j=1}^n \left( \frac{1}{a_j} \int_0^\infty |j_{\frac{1}{2}}(s)|^{p_j} ds \right)^{\frac{1}{p_j}} \right) \left( \frac{1}{t} \int_0^\infty |j_{\frac{1}{2}}(s)|^{p_0} ds \right)^{\frac{1}{p_0}} \\ &\stackrel{(\text{Korollar 3.12})}{\leq} \frac{2}{\pi} t \left( \prod_{j=1}^n \left( \frac{1}{a_j} \sqrt{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{p_j}} \right)^{\frac{1}{p_j}} \right) \left( \frac{1}{t} \sqrt{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{p_0}} \right)^{\frac{1}{p_0}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi} t \left( \prod_{j=1}^n \left( \frac{1}{a_j} \sqrt{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{\frac{1}{a_j} \sqrt{1+t^2}} \right)^{\frac{1}{p_j}} \right) \left( \frac{1}{t} \sqrt{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{\frac{1}{t} \sqrt{1+t^2}} \right)^{\frac{1}{p_0}} \\
&= \frac{2}{\pi} \left( \prod_{j=0}^n \left( \sqrt{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \right)^{\frac{1}{p_j}} \right) \\
&= \frac{2}{\pi} t \left( \sqrt{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \right)^{\sum_{j=0}^n \frac{1}{p_j}} \\
&= \sqrt{\frac{6}{\pi}} \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.
\end{aligned}$$

Zu zeigen bleibt die Ungleichung

$$V_{\infty}(a, t) \leq \sqrt{\frac{6}{\pi}} \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \leq t \left( \sqrt{2} - \frac{t}{2} \right) = V_{\infty}(v_2, t),$$

die äquivalent zu der Abschätzung  $0 \leq t^4 - 4\sqrt{2}t^3 + 9t^2 - 4\sqrt{2}t + 8 - \frac{24}{\pi}$  ist.  $\square$

Das nächste Lemma bereitet den Beweis für den Fall  $a_1 \in [0.7254492804, 1]$  vor, in dem außerdem zu sehen ist, dass sich er aus dem ersten Fall ergibt.

**Lemma 4.22.** Seien  $m = 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$  und  $t_0$  wie in Lemma 4.21 definiert. Setzen wir die Funktion  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x \mapsto (\langle x, a \rangle, x_2, \dots, x_n)$ , so gelten für alle  $t \in (0, t_0]$  die Aussagen

$$(i) \quad T(Sl(a, t)) \subseteq \overline{B}_2(0, r_m t) \times (\overline{B}_2(0, r_m))^{n-1} \text{ und}$$

$$(ii) \quad V_{\infty, mn}(a, t) \leq \frac{t}{a_1}.$$

**Beweis.** (i) Seien  $t \in (0, t_0]$  und  $x \in (\overline{B}_2(0, r_m))^n$  mit  $|\langle x, a \rangle| \leq r_m t$ . Es gelten die Ungleichungen  $|\langle x, a \rangle| \leq r_m$  und  $\|T(x)\|_{\infty} = \max \left\{ |\langle x, a \rangle|, \|(x_2, \dots, x_n)\|_{\infty} \right\} \leq r_m$ . Damit liegt  $T(x)$  in der normierten Einheitskugel  $(\overline{B}_2(0, r_m))^n$ . Weiterhin ergibt sich aus der Ungleichung  $|(T(x))_1| = |\langle x, a \rangle| \leq r_m t$  die Aussage  $T(x) \in \left\{ x \in (\overline{B}_2(0, r_m))^n : |x_1| \leq r_m t \right\}$ .

(ii)  $T$  ist linear und besitzt die Matrixdarstellung  $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$  bzgl. der Standardbasis. Deshalb ergibt sich die Ungleichung

$$\begin{aligned}
a_1 V_{\infty}(a, t) &= |\det(T)| V_{\infty}(a, t) \\
&= \text{vol}_n(Sl_{\infty}(a, t)) \\
&\stackrel{(i)}{\leq} \text{vol}_n \left( \left\{ x \in (\overline{B}_2(0, r_m))^n : |x_1| \leq r_1 t \right\} \right) \\
&= t.
\end{aligned}$$

$\square$

Im letzten Satz dieses Abschnittes beweisen wir die Ungleichung (4.53) für den zweiten Fall, d. h. für den Fall, dass  $a_1$  aus dem Intervall  $[0.7254492804, 1]$  ist. Vergleichen wir die Aussage  $V_{\infty}(a, t) \leq \frac{t}{a_1}$  aus Lemma 4.22 (ii) mit der Identität  $\sqrt{2}t - \frac{t^2}{2} = V_{\infty}(v_2, t)$ , so bemerken wir, dass

$a_1$  mindestens größer als  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  sein muss, um die Ungleichung  $\frac{t}{a_1} \leq \sqrt{2}t - \frac{t^2}{2}$  für alle  $t \in (0, t_0]$  zu erfüllen. Offensichtlich erfüllt das Intervall  $[0.7254492804, 1]$  die Bedingung. Wir werden im nächsten Satz sehen, wie die untere Grenze des Intervalls zustande kommt und dass sie von  $t_0$ , das in Lemma 4.21 definiert ist, abhängt.

**Satz 4.23** (Hauptsatz). *Seien  $m = 1$  und  $n \in \mathbb{N}$  sowie  $t_0$  wie in Lemma 4.21 definiert. Setzen wir die Konstante  $c(t_0) := \frac{2}{2\sqrt{2}-t_0} \approx 0.7254492804$ , so gilt für alle  $a \in S^{n-1}$  mit  $1 \geq a_1 \geq c(t_0) \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$  und  $t \in (0, t_0]$  die Ungleichung*

$$(4.54) \quad V_{\infty, mn}(a, t) \leq V_{\infty, mn}(v_2, t) = t \left( \sqrt{2} - \frac{t}{2} \right).$$

**Beweis.** Seien  $a \in S^{n-1}$  mit  $1 \geq a_1 \geq c(t_0) \geq \dots \geq a_n \geq 0$  und  $t \in (0, t_0]$ . Nach Lemma 4.22 (ii) gilt die Ungleichung  $V_{\infty}(a, t) \leq \frac{t}{a_1}$ . Aus der Bedingung  $a_1 \geq c(t_0)$  ergibt sich die Abschätzung  $\frac{t}{a_1} \leq \sqrt{2}t - \frac{t^2}{2}$ . Damit wiederum erhalten wir die Ungleichung  $V_{\infty}(a, t) \leq V_{\infty}(v_2, t)$ .  $\square$

Der Beweis für die Gültigkeit der Ungleichung (4.54) im Fall  $a_1 \in \left[ \sqrt{\frac{6}{13}}, \frac{2}{2\sqrt{2}-t_0} \right]$  bleibt offen, aber wir können den offen gebliebenen Bereich durch die Schichtdicke  $t_0$  noch verkleinern.

# Kapitel 5

## Schnitte und Schichten in der verallgemeinerten $l_p$ -Einheitskugel

Zunächst befassen wir uns in diesem Kapitel mit Schnitten durch den Ursprung im Einheitsball  $\overline{B}_{2,p}(0, 1)$  für den Fall  $p \in (0, 2]$ . Im Kapitel drei haben wir gezeigt, dass der minimale Schnitt durch den Ursprung senkrecht zum Normalenvektor  $v_1$  liegt. Weiterhin haben wir dort vermutet, dass der maximale Schnitt durch den Ursprung für den Fall  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  senkrecht zu  $v_n$  liegt. Diese Annahme haben wir mit einigen Ergebnissen aus Kapitel drei untermauert. Für Schnitte durch den Ursprung im Einheitsball  $\overline{B}_{2,p}(0, 1)$  wird der minimale und der maximale Schnitt auch senkrecht zu den Normalenvektoren wie zuvor angenommen, aber in vertauschten Rollen, d. h. der minimale Schnitt liegt senkrecht zu  $v_n$  und der maximale Schnitt liegt senkrecht zu  $v_1$  (siehe Abb. 5.1). Dass der maximale Schnitt senkrecht zu dem Normalenvektor  $v_1$  liegt, zeigte schon Barthe in [4, S. 89-107] für den Fall  $p \in (0, 1)$  und Meyer und Pajor in [27, S. 115] für den Fall  $p \in [1, 2]$ . Zusätzlich zeigten Meyer und Pajor im gleichen Artikel, dass senkrecht zu  $v_1$  der minimale Schnitt für den Fall  $p \in \mathbb{R}_{>2}$  angenommen wird.

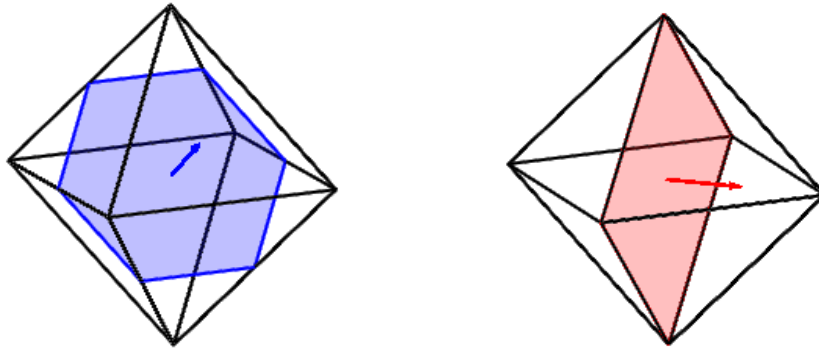


Abbildung 5.1: ■  $S_1(v_1, 0)$  und ■  $S_1(v_2, 0)$

Den ersten Beweis für die untere und obere Abschätzung des Volumens des Schnittes durch den Ursprung für den Fall  $m = 1$  und  $p \in (0, 2]$  lieferte Koldobsky in [21, S. 157-164]. Das gleiche leistete Koldobsky mit Zymonopoulou in [23, S. 186] für den Fall  $m = 2$ . Dieses Resultat werden wir im weiteren Verlauf der Arbeit mit Hinzunahme der Ideen von Koldobsky und Zymonopoulou auf den Fall  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  erweitern.

Dazu zeigen wir im ersten Abschnitt mit Hilfe der Fourier-Transformation, wie eine mögliche Volumenformel für Schnitte durch den Ursprung für  $p \in (0, 2]$  aussieht.



Diese werden wir im zweiten Abschnitt nach unten und nach oben abschätzen. Dabei erhalten wir die oben diskutierte minimale und maximale Richtung.

Im dritten Abschnitt gehen wir direkt auf den Fall  $m = 1$  ein. Dort stellen wir eine explizite Volumenformel nicht nur für Schnitte durch den Ursprung, sondern auch für allgemeine Schnitte und Schichten auf. Für Schnitte durch den Ursprung wurde bereits von Meyer und Pajor in [27, S. 117] eine Volumenformel aufgestellt. Dort wurden aber andere Methoden für den Beweis genutzt als diejenigen, die wir hier präsentieren werden.

Mit den Volumenformeln aus Abschnitt drei werden wir im letzten Abschnitt die Möglichkeit bekommen, in den Fällen  $n = 2$  und  $n = 3$  alle kritischen Punkte der Abbildungen  $A_1(\cdot, t)$  und  $V_1(\cdot, t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}_{>0}$  zu berechnen.

## 5.1 Implizite Volumenformel für Schnitte durch den Ursprung

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit dem Aufstellen einer Volumenformel für Schnitte durch den Ursprung für  $p \in (0, 2]$ , damit wir diese im zweiten Abschnitt abschätzen können. Dabei nutzen wir, wie oben erläutert, die Ideen von Koldobsky und Zymonopoulou. In ihrem Beweis gebrauchten sie u.a. die Fourier-Transformation für Distributionen. Weil wir dieses Hilfsmittel auch benötigen werden, führen wir dazu zuerst in den nächsten Schritten alle nötigen Bezeichnungen und Eigenschaften ein.

**Bezeichnung 5.1.** Für alle  $m, n, N \in \mathbb{N}$  bezeichnen wir

- (i) mit  $\mathcal{S}$ , den Raum  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{mn}, \mathbb{R})$  der rasch fallenden und unendlich oft differenzierbaren Funktionen (Testfunktionen) auf  $\mathbb{R}^{mn}$  mit Werten in  $\mathbb{R}$ , d. h.

$$\mathcal{S} = \left\{ \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^{mn}, \mathbb{R}) : \max_{|\alpha| \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}^{mn}} (1 + \|x\|_2^2)^{\frac{N}{2}} |D^\alpha \phi(x)| < \infty \text{ für alle } N \in \mathbb{N} \right\},$$

- (ii) mit  $\|\cdot\|_{(N)}$ , die durch  $\|\phi\|_{(N)} := \max_{|\alpha| \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + \|x\|_2^2)^{\frac{N}{2}} |D^\alpha \phi(x)|$  für alle  $\phi \in \mathcal{S}$  definierte Norm auf  $\mathcal{S}$ ,

- (iii) mit  $\mathcal{S}'$ , den Raum  $L(\mathcal{S}, \mathbb{R})$  der Distributionen auf dem lokal-konvexen topologischen Raum  $(\mathcal{S}, (\|\cdot\|_{(N)})_{N \in \mathbb{N}})$ .

In der nächsten Bemerkung halten wir eine Klasse von Distributionen auf  $\mathcal{S}$  fest, mit denen wir hauptsächlich arbeiten werden.

**Bemerkung 5.2.** Seien  $m, n \in \mathbb{N}$  und  $f \in L_{1,lok}(\mathbb{R}^{mn}, \mathbb{R})$  mit moderatem Wachstum, d. h. für alle  $\alpha \in \mathbb{N}^{mn}$  existieren  $C \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $N \in \mathbb{N}$  so, dass für alle  $x \in \mathbb{R}^{mn}$  die folgende Ungleichung gilt:

$$|D^\alpha f(x)| \leq C(1 + \|x\|_2^2)^{\frac{N}{2}}.$$

Definieren wir die Funktion  $\langle f, \cdot \rangle$  durch

$$\int_{\mathbb{R}^{mn}} f(x) \phi(x) dx \quad \text{für alle } \phi \in \mathcal{S},$$

so ist  $\langle f, \cdot \rangle$  eine Distribution auf  $\mathcal{S}$ , d. h.  $\langle f, \cdot \rangle \in \mathcal{S}'$ .

Für die Definition der Fourier-Transformation für Distributionen greifen wir auf die Fourier-Transformation für integrierbare Funktionen zurück und erhalten die

**Definition 5.3.** Für alle  $f \in \mathcal{S}'$  ist die Fourier-Transformation  $\widehat{f}$  von  $f$  gegeben durch die Identität  $\widehat{f}(\phi) = \langle \widehat{f}, \phi \rangle = \langle f, \widehat{\phi} \rangle$  für alle  $\phi \in \mathcal{S}$ .

Nun kommen wir zum eigentlichen Thema dieses Abschnittes. Bevor wir die implizite Volumenformel für Schnitte durch den Ursprung aufstellen können, benötigen wir einige vorbereitende Lemmata. Das nächste ist ein Resultat von Bernstein.

**Lemma 5.4.** Für alle  $p \in (0, 2]$  existiert ein Maß  $\mu_p$  auf  $\mathbb{R}_{>0}$  so, dass für alle  $s \in \mathbb{R}$  die folgende Identität gilt:

$$(5.1) \quad e^{-|s|^p} = \int_0^\infty e^{-us^2} d\mu_p(u).$$

**Beweis.** Sei  $p \in (0, 2]$ . Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, s \mapsto e^{-|s|^{\frac{p}{2}}}$  ist absolut monoton, d. h. für alle  $k \in \mathbb{N}$  und  $s \in \mathbb{R}_{>0}$  gilt die Ungleichung  $(-1)^k f^{(k)}(s) \geq 0$ . Nach dem Satz von Bernstein aus [38, S. 160] existiert ein Maß  $\mu_p$  auf  $\mathbb{R}_{>0}$  so, dass für alle  $s \in \mathbb{R}$  die Gleichung

$$e^{-|s|^{\frac{p}{2}}} = \int_0^\infty e^{-us} d\mu_p(u)$$

gilt. Damit ergibt sich für alle  $s \in \mathbb{R}$  die Identität

$$e^{-|s|^p} = \int_0^\infty e^{-us^2} d\mu_p(u). \quad \square$$

Später werden wir radialen Funktionen begegnen, d. h. Funktionen, die nur vom Abstand zum Ursprung abhängen. Die radiale Eigenschaft werden wir für weitere Resultate ausnutzen. Deshalb halten wir das nachfolgende Lemma fest.

**Lemma 5.5.** Seien  $m \in \mathbb{N}$  und  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  eine integrierbare radiale Funktion. Es gilt für alle  $s \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $y \in \mathbb{R}^m$  die Identität

$$\widehat{g}(sy) = \widehat{g}\left((s\|y\|_2, 0, \dots, 0)\right).$$

**Beweis.** Seien  $s \in \mathbb{R}_{>0}, y \in \mathbb{R}^m$  und  $u \in O(\mathbb{R}^m)$  mit  $u(y) = (\|y\|_2, 0, \dots, 0)$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \widehat{g}(sy) &= (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} g(x) e^{-i\langle x, sy \rangle_{\mathbb{R}}} dx &= (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} g(\|x\|_2) e^{-i\langle x, sy \rangle_{\mathbb{R}}} dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} g(\|u^{-1}(x)\|_2) e^{-i\langle x, sy \rangle_{\mathbb{R}}} dx &= (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} g(\|x\|_2) e^{-i\langle u(x), sy \rangle_{\mathbb{R}}} dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} g(\|x\|_2) e^{-i\langle x, su(y) \rangle_{\mathbb{R}}} dx &= (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} g(x) e^{-ix_1 s\|y\|_2} dx \\ &= \widehat{g}\left((s\|y\|_2, 0, \dots, 0)\right). \end{aligned} \quad \square$$

In Bemerkung 5.2 haben wir darauf hingewiesen, dass jede lokal integrierbare Funktion mit moderatem Wachstum als Distribution identifiziert werden kann. Da die Funktion  $\|\cdot\|_{2,p}^{-m(n-1)}$  damit im Sinne von Bemerkung 5.2 eine Distribution ist, können wir ihre Fourier-Transformierte bilden und erhalten das

**Lemma 5.6.** *Seien  $m, n \in \mathbb{N}$  und  $p \in (0, 2]$ . Setzen wir  $g_p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{-\|x\|_2^p}$ , so gelten die folgenden Aussagen:*

(i) *die Funktion  $\|\cdot\|_{2,p}^{-m(n-1)}$  besitzt als Distribution auf dem  $\mathbb{R}^{mn}$  die lokal integrierbare Fourier-Transformation*

$$(5.2) \quad \widehat{\|\cdot\|_{2,p}^{-m(n-1)}}(y) = \frac{p}{\Gamma\left(\frac{m(n-1)}{p}\right)} \int_0^\infty \left( \prod_{j=1}^n \widehat{g}_p(sy_j) \right) s^{m-1} ds \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^{mn},$$

(ii) *es existiert ein Maß  $\mu_p$  auf  $\mathbb{R}_{>0}$  so, dass für alle  $y \in \mathbb{R}^m$  und  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  die Identität*

$$(5.3) \quad \widehat{g}_p(sy) = 2^{-\frac{m}{2}} \int_0^\infty u^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{s^2 \|y\|_2^2}{4u}} d\mu_p(u)$$

*gilt. Insbesondere ergibt sich für alle  $y \in \mathbb{R}^{mn}$  die Gleichheit*

$$(5.4) \quad \widehat{\|\cdot\|_{2,p}^{-m(n-1)}}(y) = \frac{p}{2^{\frac{mn}{2}} \Gamma\left(\frac{m(n-1)}{p}\right)} \int_0^\infty \int_{(\mathbb{R}_{>0})^n} \left( \prod_{j=1}^n u_j^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{s^2 \|y_j\|_2^2}{4u_j}} \right) d\mu_{p,n}(u) s^{m-1} ds.$$

**Beweis.** (i) Mit der Integraldarstellung der Gammafunktion ergibt sich für alle  $x \in \mathbb{R}^{mn}$  die Gleichung

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \|x\|_{2,p}^{-m(n-1)} &= \|x\|_{2,p}^{-m(n-1)} \frac{p}{\Gamma\left(\frac{m(n-1)}{p}\right)} \int_0^\infty s^{m(n-1)-1} e^{-s^p} ds \\ &= \frac{p}{\Gamma\left(\frac{m(n-1)}{p}\right)} \int_0^\infty s^{m(n-1)-1} e^{-s^p \|x\|_{2,p}^p} ds. \end{aligned}$$

Sei  $s \in \mathbb{R}_{>0}$ . Für alle  $y \in \mathbb{R}^{mn}$  erhalten wir mit der Fourier-Transformation die Identität

$$(5.6) \quad \begin{aligned} e^{-s^p \|\cdot\|_{2,p}^p}(y) &= (2\pi)^{-\frac{mn}{2}} \int_{\mathbb{R}^{mn}} e^{-s^p \|x\|_{2,p}^p} e^{-i\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}}} dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{mn}{2}} s^{-mn} \int_{\mathbb{R}^{mn}} e^{-\|x\|_{2,p}^p} e^{-i\left\langle \frac{x}{s}, y \right\rangle_{\mathbb{R}}} dx \\ &= s^{-mn} \left( \prod_{j=1}^n (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\|x_j\|_2^p} e^{-i\left\langle x_j, \frac{y_j}{s} \right\rangle_{\mathbb{R}}} dx_j \right) \\ &= s^{-mn} \left( \prod_{j=1}^n \widehat{g}_p\left(\frac{y_j}{s}\right) \right). \end{aligned}$$

Da die Funktion  $\|\cdot\|_{2,p}^{-m(n-1)}$  eine gerade, lokal integrierbare Funktion auf dem  $\mathbb{R}^{mn}$  und  $\widehat{\phi} \in \mathcal{S}$  für alle  $\phi \in \mathcal{S}$  ist, ergibt sich mit Fubini ohne Einschränkung für alle geraden Testfunktionen  $\phi \in \mathcal{S}$  die Gleichung

$$\begin{aligned}
 (5.7) \quad \left\langle \|\cdot\|_{2,p}^{-m(n-1)}, \phi \right\rangle &= \left\langle \|\cdot\|_{2,p}^{-m(n-1)}, \widehat{\phi} \right\rangle \\
 &\stackrel{\text{(Bemerkung 5.2)}}{=} \int_{\mathbb{R}^{mn}} \|x\|_{2,p}^{-m(n-1)} \widehat{\phi}(x) dx \\
 &\stackrel{(5.5)}{=} \frac{p}{\Gamma\left(\frac{m(n-1)}{p}\right)} \int_{\mathbb{R}^{mn}} \int_0^\infty s^{m(n-1)-1} e^{-s^p \|x\|_{2,p}^p} ds \widehat{\phi}(x) dx \\
 &= \frac{p}{\Gamma\left(\frac{m(n-1)}{p}\right)} \int_0^\infty s^{m(n-1)-1} \int_{\mathbb{R}^{mn}} e^{-s^p \|\cdot\|_{2,p}^p}(y) \phi(y) dy ds \\
 &\stackrel{(5.6)}{=} \frac{p}{\Gamma\left(\frac{m(n-1)}{p}\right)} \int_0^\infty s^{-(m+1)} \int_{\mathbb{R}^{mn}} \left( \prod_{j=1}^n \widehat{g}_p\left(\frac{y_j}{s}\right) \right) \phi(y) dy ds \\
 &= \frac{p}{\Gamma\left(\frac{m(n-1)}{p}\right)} \int_0^\infty s^{m-1} \int_{\mathbb{R}^{mn}} \left( \prod_{j=1}^n \widehat{g}_p(s y_j) \right) \phi(y) dy ds \\
 &= \int_{\mathbb{R}^{mn}} \frac{p}{\Gamma\left(\frac{m(n-1)}{p}\right)} \int_0^\infty \left( \prod_{j=1}^n \widehat{g}_p(s y_j) \right) s^{m-1} ds \phi(y) dy \\
 &= \left\langle \frac{p}{\Gamma\left(\frac{m(n-1)}{p}\right)} \int_0^\infty \left( \prod_{j=1}^n \widehat{g}_p(s(\cdot)) \right) s^{m-1} ds, \phi \right\rangle.
 \end{aligned}$$

(ii) Nach Lemma 5.4 existiert ein Maß  $\mu_p$  auf  $\mathbb{R}_{>0}$  so, dass für alle  $x \in \mathbb{R}^m$  die Identität

$$(5.8) \quad g_p(x) = e^{-\|x\|_2^p} = \int_0^\infty e^{-u\|x\|_2^2} d\mu_p(u)$$

gilt. Definieren wir  $x_{(1)} := (x_2, \dots, x_m)$  für alle  $x \in \mathbb{R}^m$ , so erhalten wir für alle  $y \in \mathbb{R}^m$  und  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit dem Satz von Fubini die Gleichung

$$\begin{aligned}
 \widehat{g}_p(sy) &\stackrel{\text{(Lemma 5.5)}}{=} \widehat{g}_p\left(s\|y\|_2, 0, \dots, 0\right) \\
 &= (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} g_p(x) e^{-is\|y\|_2 x_1} dx \\
 &\stackrel{(5.8)}{=} (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} \int_0^\infty e^{-u\|x\|_2^2} d\mu_p(u) e^{-is\|y\|_2 x_1} dx \\
 &= (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{m-1}} e^{-u\|x_{(1)}\|_2^2} dx_{(1)} \int_{\mathbb{R}} e^{-ux_1^2} e^{-is\|y\|_2 x_1} dx_1 d\mu_p(u)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{m-1}} e^{-u\|x_{(1)}\|_2^2} dx_{(1)} \sqrt{\frac{\pi}{u}} e^{-\frac{s^2\|y\|_2^2}{4u}} d\mu_p(u) \\
&= (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \sqrt{\pi} \underbrace{\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{m-1}} e^{-\|x_{(1)}\|_2^2} dx_{(1)} u^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{s^2\|y\|_2^2}{4u}} d\mu_p(u)}_{\substack{= \pi^{\frac{m-1}{2}} \\ [20, S.292]}} \\
(5.9) \quad &= 2^{-\frac{m}{2}} \int_0^\infty u^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{s^2\|y\|_2^2}{4u}} d\mu_p(u).
\end{aligned}$$

Weiter gilt für alle  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  und  $y \in \mathbb{R}^{mn}$  die Identität

$$\begin{aligned}
\widehat{e^{-s^p\|\cdot\|_{2,p}^p}}(y) &\stackrel{(5.6)}{=} s^{-mn} \left( \prod_{j=1}^n \widehat{g}_p\left(\frac{y_j}{s}\right) \right) \\
&\stackrel{(5.9)}{=} s^{-mn} \left( \prod_{j=1}^n 2^{-\frac{m}{2}} \int_0^\infty u_j^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{\|y_j\|_2^2}{4u_j s^2}} d\mu_p(u_j) \right) \\
(5.10) \quad &= 2^{-\frac{mn}{2}} s^{-mn} \int_{(\mathbb{R}_{>0})^n} \left( \prod_{j=1}^n u_j^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{\|y_j\|_2^2}{4u_j s^2}} \right) d\mu_{p,n}(u).
\end{aligned}$$

Wie oben erhalten wir mit Fubini ohne Einschränkung für alle geraden Testfunktionen  $\phi \in \mathcal{S}$  die Gleichung

$$\begin{aligned}
&\left\langle \widehat{\|\cdot\|_{2,p}^{-m(n-1)}}, \phi \right\rangle \\
&\stackrel{(5.7)}{=} \frac{p}{\Gamma\left(\frac{m(n-1)}{p}\right)} \int_0^\infty s^{m(n-1)-1} \int_{\mathbb{R}^{mn}} \widehat{e^{-s^p\|\cdot\|_{2,p}^p}}(y) \phi(y) dy ds \\
&\stackrel{(5.10)}{=} \frac{p}{2^{\frac{mn}{2}} \Gamma\left(\frac{m(n-1)}{p}\right)} \int_0^\infty s^{-(m+1)} \int_{\mathbb{R}^{mn}(\mathbb{R}_{>0})^n} \left( \prod_{j=1}^n u_j^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{\|y_j\|_2^2}{4u_j s^2}} \right) d\mu_{p,n}(u) \phi(y) dy ds \\
&= \int_{\mathbb{R}^{mn}} \frac{p}{2^{\frac{mn}{2}} \Gamma\left(\frac{m(n-1)}{p}\right)} \int_0^\infty \int_{(\mathbb{R}_{>0})^n} \left( \prod_{j=1}^n u_j^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{s^2\|y_j\|_2^2}{4u_j}} \right) d\mu_{p,n}(u) s^{m-1} ds \phi(y) dy \\
&= \left\langle \frac{p}{2^{\frac{mn}{2}} \Gamma\left(\frac{m(n-1)}{p}\right)} \int_0^\infty \int_{(\mathbb{R}_{>0})^n} \left( \prod_{j=1}^n u_j^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{s^2\|\cdot\|_2^2}{4u_j}} \right) d\mu_{p,n}(u) s^{m-1} ds, \phi \right\rangle. \quad \square
\end{aligned}$$

Wir zeigen ebenfalls die Identität (5.4) aus Lemma 5.6 für eine „Aufdickung“ der Norm  $\|\cdot\|_{2,p}^{-m(n-1)}$ . Was das genau bedeutet, klären wir im nächsten Lemma. Jedenfalls benötigen wir diese „aufgedickte“ Norm für die darunter stehende Gleichung (5.16). Im Gegensatz zu der Norm  $\|\cdot\|_{2,p}^{-m(n-1)}$  hat die „Aufdickung“ den Vorteil, dass sie glatt ist.

**Lemma 5.7.** Seien  $m, n \in \mathbb{N}$  und  $p \in (0, 2]$ . Definieren wir eine Norm  $\|\cdot\|_{2,p,\varepsilon}$  auf dem  $\mathbb{R}^{mn}$  für alle  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  durch

$$\|x\|_{2,p,\varepsilon} := \left( \sum_{j=1}^n \left( \varepsilon \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \|x_k\|_2^2 + \|x_j\|_2^2 \right)^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^{mn}$$

sowie für alle  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $k \in \mathbb{N}_{\leq n}$  die Funktion  $U_{\varepsilon,k} : (\mathbb{R}_{>0})^n \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto u_k + \varepsilon \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n u_j$ ,

so existiert ein Maß  $\mu_{p,n}$  auf  $(\mathbb{R}_{>0})^n$  mit der Eigenschaft, dass die Funktion  $\|\cdot\|_{2,p,\varepsilon}^{-m(n-1)}$  als Distribution auf dem  $\mathbb{R}^{mn}$  die folgende lokal integrierbare Fourier-Transformation besitzt: für alle  $y \in \mathbb{R}^{mn}$  gilt die Identität

$$\widehat{\|\cdot\|_{2,p,\varepsilon}^{-m(n-1)}}(y) = \frac{p}{2^{\frac{mn}{2}} \Gamma\left(\frac{m(n-1)}{p}\right)} \int_0^\infty \int_{(\mathbb{R}_{>0})^n} \left( \prod_{k=1}^n (U_{\varepsilon,k}(u))^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{s^2 \|y_k\|_2^2}{4U_{\varepsilon,k}(u)}} \right) d\mu_{p,n}(u) s^{m-1} ds.$$

**Beweis.** Nach Lemma 5.4 existiert ein Maß  $\mu_p$  auf  $\mathbb{R}_{>0}$  so, dass für alle  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $x \in \mathbb{R}^{mn}$  und  $j \in \mathbb{N}_{\leq n}$  die folgende Identität gilt:

$$(5.11) \quad e^{-\left(\varepsilon \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \|x_k\|_2^2 + \|x_j\|_2^2\right)^{\frac{p}{2}}} = \int_0^\infty e^{-u_j \left(\varepsilon \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \|x_k\|_2^2 + \|x_j\|_2^2\right)} d\mu_p(u_j).$$

Weiter ergibt sich mit der Integraldarstellung der Gammafunktion für alle  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $x \in \mathbb{R}^{mn}$  die Gleichung

$$(5.12) \quad \begin{aligned} \|x\|_{2,p,\varepsilon}^{-m(n-1)} &= \|x\|_{2,p,\varepsilon}^{-m(n-1)} \frac{p}{\Gamma\left(\frac{m(n-1)}{p}\right)} \int_0^\infty s^{m(n-1)-1} e^{-s^p} ds \\ &= \frac{p}{\Gamma\left(\frac{m(n-1)}{p}\right)} \int_0^\infty s^{m(n-1)-1} e^{-s^p \|x\|_{2,p,\varepsilon}^p} ds. \end{aligned}$$

Seien  $s, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ . Für alle  $y \in \mathbb{R}^{mn}$  erhalten wir mit Fubini die Gleichung

$$\begin{aligned} & e^{-s^p \widehat{\|\cdot\|_{2,p,\varepsilon}^p}}(y) \\ &= (2\pi)^{-\frac{mn}{2}} \int_{\mathbb{R}^{mn}} e^{-s^p \|x\|_{2,p,\varepsilon}^p} e^{-i\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}}} dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{mn}{2}} s^{-mn} \int_{\mathbb{R}^{mn}} e^{-\|x\|_{2,p,\varepsilon}^p} e^{-i\langle \frac{x}{s}, y \rangle_{\mathbb{R}}} dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{mn}{2}} s^{-mn} \int_{\mathbb{R}^{mn}} e^{-\sum_{j=1}^n \left( \varepsilon \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \|x_k\|_2^2 + \|x_j\|_2^2 \right)^{\frac{p}{2}}} e^{-i\langle \frac{x}{s}, y \rangle_{\mathbb{R}}} dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{mn}{2}} s^{-mn} \int_{\mathbb{R}^{mn}} \left( \prod_{j=1}^n e^{-\left( \varepsilon \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \|x_k\|_2^2 + \|x_j\|_2^2 \right)^{\frac{p}{2}}} \right) e^{-i\langle \frac{x}{s}, y \rangle_{\mathbb{R}}} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(5.11)}{=} (2\pi)^{-\frac{mn}{2}} s^{-mn} \int_{\mathbb{R}^{mn}} \left( \prod_{j=1}^n \int_0^\infty e^{-u_j \left( \varepsilon \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \|x_k\|_2^2 + \|x_j\|_2^2 \right)} d\mu_p(u_j) \right) e^{-i \langle \frac{x}{s}, y \rangle_{\mathbb{R}}} dx \\
& = (2\pi)^{-\frac{mn}{2}} s^{-mn} \int_{\mathbb{R}^{mn}} \int_{(\mathbb{R}_{>0})^n} \left( \prod_{j=1}^n e^{-u_j \left( \varepsilon \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \|x_k\|_2^2 + \|x_j\|_2^2 \right)} \right) d\mu_{p,n}(u) e^{-i \langle \frac{x}{s}, y \rangle_{\mathbb{R}}} dx \\
(5.13) \quad & = (2\pi)^{-\frac{mn}{2}} s^{-mn} \int_{(\mathbb{R}_{>0})^n} \int_{\mathbb{R}^{mn}} e^{-\sum_{j=1}^n u_j \left( \varepsilon \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \|x_k\|_2^2 + \|x_j\|_2^2 \right)} e^{-i \langle \frac{x}{s}, y \rangle_{\mathbb{R}}} dx d\mu_{p,n}(u).
\end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (5.13) und

$$\sum_{j=1}^n u_j \left( \varepsilon \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \|x_k\|_2^2 + \|x_j\|_2^2 \right) = \sum_{k=1}^n \left( u_k + \varepsilon \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n u_j \right) \|x_k\|_2^2 = \sum_{k=1}^n U_{\varepsilon,k}(u) \|x_k\|_2^2$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^{mn}$  und  $u \in (\mathbb{R}_{>0})^n$  ergibt sich für alle  $y \in \mathbb{R}^{mn}$  die Identität

$$\begin{aligned}
& \widehat{e^{-s^p \|\cdot\|_{2,p,\varepsilon}^p}}(y) \\
& = (2\pi)^{-\frac{mn}{2}} s^{-mn} \int_{(\mathbb{R}_{>0})^n} \int_{\mathbb{R}^{mn}} e^{-\sum_{k=1}^n U_{\varepsilon,k}(u) \|x_k\|_2^2} e^{-i \langle \frac{x}{s}, y \rangle_{\mathbb{R}}} dx d\mu_{p,n}(u) \\
& = (2\pi)^{-\frac{mn}{2}} s^{-mn} \int_{(\mathbb{R}_{>0})^n} \left( \prod_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}^m} e^{-U_{\varepsilon,k}(u) \|x_k\|_2^2} e^{-i \langle \frac{x_k}{s}, y_k \rangle_{\mathbb{R}}} dx_k \right) d\mu_{p,n}(u) \\
(5.14) \quad & \stackrel{(\text{Lemma 5.5})}{=} (2\pi)^{-\frac{mn}{2}} s^{-mn} \int_{(\mathbb{R}_{>0})^n} \left( \prod_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}^m} e^{-U_{\varepsilon,k}(u) \|x_k\|_2^2} e^{-i \frac{x_{k1}}{s} \|y_k\|_2^2} dx_k \right) d\mu_{p,n}(u).
\end{aligned}$$

Mit Identität (5.14) und der Definition  $x_{k(1)} := (x_{k2}, \dots, x_{km}) \in \mathbb{R}^{m-1}$  für alle  $k \in \mathbb{N}_{\leq n}$  und  $x \in \mathbb{R}^{mn}$  erhalten wir für alle  $k \in \mathbb{N}_{\leq n}$  und  $y_k \in \mathbb{R}^m$  die Gleichung

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^m} e^{-U_{\varepsilon,k}(u) \|x_k\|_2^2} e^{-i \frac{x_{k1}}{s} \|y_k\|_2^2} dx_k & = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} e^{-U_{\varepsilon,k}(u) \|x_{k(1)}\|_2^2} dx_{k(1)} \int_{\mathbb{R}} e^{-U_{\varepsilon,k}(u) x_{k1}^2} e^{-i \frac{x_{k1}}{s} \|y_k\|_2^2} dx_{k1} \\
& = (U_{\varepsilon,k}(u))^{-\frac{m-1}{2}} \pi^{\frac{m-1}{2}} (U_{\varepsilon,k}(u))^{-\frac{1}{2}} \pi^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\|y_k\|_2^2}{4U_{\varepsilon,k}(u)s^2}} \\
& = (U_{\varepsilon,k}(u))^{-\frac{m}{2}} \pi^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{\|y_k\|_2^2}{4U_{\varepsilon,k}(u)s^2}}.
\end{aligned}$$

Insgesamt bekommen wir für alle  $y \in \mathbb{R}^{mn}$  die Identität

$$(5.15) \quad \widehat{e^{-s^p \|\cdot\|_{2,p,\varepsilon}^p}}(y) = 2^{-\frac{mn}{2}} s^{-mn} \int_{(\mathbb{R}_{>0})^n} \left( \prod_{k=1}^n (U_{\varepsilon,k}(u))^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{\|y_k\|_2^2}{4U_{\varepsilon,k}(u)s^2}} \right) d\mu_{p,n}(u).$$

Da die Funktion  $\|\cdot\|_{2,p,\varepsilon}^{-m(n-1)}$  eine gerade, lokal integrierbare Funktion auf dem  $\mathbb{R}^{mn}$  ist, ergibt sich mit Fubini ohne Einschränkung für alle geraden Testfunktionen  $\phi \in \mathcal{S}$  die Gleichung

$$\begin{aligned}
& \left\langle \widehat{\|\cdot\|_{2,p,\varepsilon}^{-m(n-1)}}, \phi \right\rangle \\
&= \left\langle \|\cdot\|_{2,p,\varepsilon}^{-m(n-1)}, \widehat{\phi} \right\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^{mn}} \|x\|_{2,p,\varepsilon}^{-m(n-1)} \widehat{\phi}(x) dx \\
&\stackrel{(5.12)}{=} \frac{p}{\Gamma\left(\frac{m(n-1)}{p}\right)} \int_{\mathbb{R}^{mn}} \int_0^\infty s^{m(n-1)-1} e^{-s^p \|x\|_{2,p,\varepsilon}^p} ds \widehat{\phi}(x) dx \\
&= \frac{p}{\Gamma\left(\frac{m(n-1)}{p}\right)} \int_0^\infty s^{m(n-1)-1} \int_{\mathbb{R}^{mn}} e^{-s^p \|\cdot\|_{2,p,\varepsilon}^p}(y) \phi(y) dy ds \\
&\stackrel{(5.15)}{=} \frac{p}{2^{\frac{mn}{2}} \Gamma\left(\frac{m(n-1)}{p}\right)} \int_0^\infty s^{-(m+1)} \int_{\mathbb{R}^{mn}(\mathbb{R}_{>0})^n} \left( \prod_{k=1}^n (U_{\varepsilon,k}(u))^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{\|y_k\|_2^2}{4U_{\varepsilon,k}(u)s^2}} \right) d\mu_{p,n}(u) \phi(y) dy ds \\
&= \int_{\mathbb{R}^{mn}} \frac{p}{2^{\frac{mn}{2}} \Gamma\left(\frac{m(n-1)}{p}\right)} \int_0^\infty \int_{(\mathbb{R}_{>0})^n} \left( \prod_{k=1}^n (U_{\varepsilon,k}(u))^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{s^2 \|y_k\|_2^2}{4U_{\varepsilon,k}(u)}} \right) d\mu_{p,n}(u) s^{m-1} ds \phi(y) dy \\
&= \left\langle \frac{p}{2^{\frac{mn}{2}} \Gamma\left(\frac{m(n-1)}{p}\right)} \int_0^\infty \int_{(\mathbb{R}_{>0})^n} \left( \prod_{k=1}^n (U_{\varepsilon,k}(u))^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{s^2 \|\cdot\|_2^2}{4U_{\varepsilon,k}(u)}} \right) d\mu_{p,n}(u) s^{m-1} ds, \phi \right\rangle. \quad \square
\end{aligned}$$

Im nächsten Lemma stellen wir die erste Verallgemeinerung der Volumenformel für Schnitte durch den Ursprung von Koldobsky auf. Im Beweis dieser Volumenformel verwenden wir die zentrale Fourier-Transformationsformel für Schnitte von Koldobsky aus [22, S. 1514]. Weiterhin nutzen wir den Beweis von Koldobsky und Zymonopoulou für den Fall  $m = 2$  aus [23, S. 192] aus.

**Lemma 5.8.** *Seien  $m, n \in \mathbb{N}$  und  $p \in (0, 2]$ . Weiter seien  $a \in S_m^{n-1}$  und  $B_a$  wie in Lemma 1.19 definiert. Es gilt die folgende Volumenformel für Schnitte durch den Ursprung:*

$$(5.16) \quad A_{p,m(n-1)}(a, 0) = \frac{1}{(2\pi)^m m(n-1)} \int_{S^{mn-1} \cap \langle B_a \rangle_{\mathbb{R}}} \widehat{\|\cdot\|_{2,p}^{-m(n-1)}}(y) dy.$$

**Beweis.** Für den Beweis betrachten wir für alle  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  die Norm  $\|\cdot\|_{2,p,\varepsilon}$  aus Lemma 5.7. Zunächst bemerken wir, dass die Funktion  $\mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, \varepsilon \mapsto \|x\|_{2,p,\varepsilon}$  für alle  $x \in \mathbb{R}^{mn}$  stetig ist und dass  $\|\cdot\|_{2,p,\varepsilon} \in C^\infty(S^{mn-1}, \mathbb{R})$ . Die Familie  $(\|\cdot\|_{2,p,\varepsilon})_{\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}}$  konvergiert auf  $S^{mn-1}$  gleichmäßig gegen  $\|\cdot\|_{2,p}$  für  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Setzen wir  $\overline{B}_{2,p,\varepsilon}(0, 1) := \{x \in \mathbb{R}^{mn} : \|x\|_{2,p,\varepsilon} \leq 1\}$ , so gilt die Gleichung



$$\begin{aligned}
 A_p(a, 0) &= \text{vol}_{m(n-1)} \left( \overline{B}_{2,p}(0, 1) \cap B_a^{\perp_{\mathbb{R}}} \right) \\
 &\stackrel{[24, S.16]}{=} \frac{1}{m(n-1)} \int_{S^{mn-1} \cap B_a^{\perp_{\mathbb{R}}}} \|x\|_{2,p}^{m(n-1)} dx \\
 &= \frac{1}{m(n-1)} \int_{S^{mn-1} \cap B_a^{\perp_{\mathbb{R}}}} \left( \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \|x\|_{2,p,\varepsilon} \right)^{m(n-1)} dx \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{m(n-1)} \int_{S^{mn-1} \cap B_a^{\perp_{\mathbb{R}}}} \|x\|_{2,p,\varepsilon}^{m(n-1)} dx \right) \\
 &\stackrel{[22, S.1514]}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{(2\pi)^m m(n-1)} \int_{S^{mn-1} \cap \langle B_a \rangle_{\mathbb{R}}} \|\cdot\|_{2,p,\varepsilon}^{-m(n-1)}(y) dy \right) \\
 &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{(2\pi)^m m(n-1)} \int_{S^{mn-1} \cap \langle B_a \rangle_{\mathbb{R}}} \|\cdot\|_{2,p}^{-m(n-1)}(y) dy.
 \end{aligned}$$

Die Gleichung  $(*)$  ergibt sich aus den nachfolgenden Überlegungen. Zunächst folgt mit der Funktion  $U_{\varepsilon,k} : (\mathbb{R}_{>0})^n \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto u_k + \varepsilon \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n u_j$  für alle  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $k \in \mathbb{N}_{\leq n}$  aus Lemma 5.7 und aus der Tatsache, dass  $S^{mn-1} \cap \langle B_a \rangle_{\mathbb{R}} = S^{m-1}$  und  $\text{vol}_{m-1}(S^{m-1}) = 2\pi\kappa_{m-1}$  ist, die Gleichung

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{(2\pi)^m m(n-1)} \int_{S^{mn-1} \cap B_a^{\perp_{\mathbb{R}}}} \|\cdot\|_{2,p,\varepsilon}^{-m(n-1)}(y) dy \\
 &\stackrel{(\text{Lemma 5.7})}{=} \frac{1}{(2\pi)^m 2^{\frac{mn}{2}} \Gamma\left(\frac{m(n-1)+p}{p}\right)} \\
 &\quad \cdot \int_{S^{mn-1} \cap B_a^{\perp_{\mathbb{R}}}} \int_0^\infty \int_{(\mathbb{R}_{>0})^n} \left( \prod_{k=1}^n (U_{\varepsilon,k}(u))^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{s^2 \|y_k\|_2^2}{4U_{\varepsilon,k}(u)}} \right) d\mu_{p,n}(u) s^{m-1} ds dy \\
 &\stackrel{(\text{Lemma 1.19})}{=} \frac{1}{(2\pi)^m 2^{\frac{mn}{2}} \Gamma\left(\frac{m(n-1)+p}{p}\right)} \\
 &\quad \cdot \int_0^\infty \int_{S^{mn-1} \cap B_a^{\perp_{\mathbb{R}}}} 1 dy \int_{(\mathbb{R}_{>0})^n} \left( \prod_{k=1}^n (U_{\varepsilon,k}(u))^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{s^2 |a_{k1}|^2}{4U_{\varepsilon,k}(u)}} \right) d\mu_{p,n}(u) s^{m-1} ds \\
 (5.17) &= \frac{\kappa_{m-1}}{(2\pi)^{m-1} 2^{\frac{mn}{2}} \Gamma\left(\frac{m(n-1)+p}{p}\right)} \int_0^\infty \int_{(\mathbb{R}_{>0})^n} \left( \prod_{k=1}^n (U_{\varepsilon,k}(u))^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{s^2 |a_{k1}|^2}{4U_{\varepsilon,k}(u)}} \right) d\mu_{p,n}(u) s^{m-1} ds
 \end{aligned}$$

und die Gleichung

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(2\pi)^m m(n-1)} \int_{S^{mn-1} \cap B_a^\perp \mathbb{R}} \|\cdot\|_{2,p}^{-m(n-1)}(y) dy \\
& \stackrel{(5.4)}{=} \frac{1}{(2\pi)^m 2^{\frac{mn}{2}} \Gamma\left(\frac{m(n-1)+p}{p}\right)} \\
& \quad \cdot \int_{S^{mn-1} \cap B_a^\perp \mathbb{R}} \int_0^\infty \int_{(\mathbb{R}_{>0})^n} \left( \prod_{j=1}^n u_j^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{s^2 \|y_j\|_2^2}{4u_j}} \right) d\mu_{p,n}(u) s^{m-1} ds dy \\
(5.18) \quad & \stackrel{(\text{Lemma 1.19})}{=} \frac{\kappa_{m-1}}{(2\pi)^{m-1} 2^{\frac{mn}{2}} \Gamma\left(\frac{m(n-1)+p}{p}\right)} \int_0^\infty \int_{(\mathbb{R}_{>0})^n} \left( \prod_{j=1}^n u_j^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{s^2 |a_{j1}|^2}{4u_j}} \right) d\mu_{p,n}(u) s^{m-1} ds.
\end{aligned}$$

Mit der punktweisen Konvergenz

$$(5.19) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \prod_{k=1}^n (U_{\varepsilon,k}(u))^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{s^2 |a_{k1}|^2}{4U_{\varepsilon,k}(u)}} \right) = \prod_{k=1}^n u_k^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{s^2 |a_{k1}|^2}{4u_k}}$$

für alle  $u \in (\mathbb{R}_{>0})^n$  und  $s \in \mathbb{R}_{>0}$  erhalten wir mit dem Satz von Lebesgue, der Gleichung (5.17) und der Gleichung (5.18) die Identität

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \frac{\kappa_{m-1}}{(2\pi)^{m-1} 2^{\frac{mn}{2}} \Gamma\left(\frac{m(n-1)+p}{p}\right)} \int_0^\infty \int_{(\mathbb{R}_{>0})^n} \left( \prod_{k=1}^n (U_{\varepsilon,k}(u))^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{s^2 |a_{k1}|^2}{4U_{\varepsilon,k}(u)}} \right) d\mu_{p,n}(u) s^{m-1} ds \right) \\
& = \frac{\kappa_{m-1}}{(2\pi)^{m-1} 2^{\frac{mn}{2}} \Gamma\left(\frac{m(n-1)+p}{p}\right)} \int_0^\infty \int_{(\mathbb{R}_{>0})^n} \left( \prod_{j=1}^n u_j^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{s^2 |a_{j1}|^2}{4u_j}} \right) d\mu_{p,n}(u) s^{m-1} ds.
\end{aligned}$$

Für die letzten Gleichheit prüfen wir die Voraussetzungen des Satzes von Lebesgue.

Nach Zolotarev [39] existiert eine Dichte  $f_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  für das Maß  $\mu_p$  mit der Eigenschaft

$$(5.20) \quad f_p(u) \approx |u|^{-1-\frac{p}{2}} \text{ für } u \rightarrow \infty.$$

Nach Kalton und Koldobsky [17, S. 261] gilt die Identität

$$(5.21) \quad \int_0^\infty u^{-\frac{m}{2}} d\mu_p(u) = \frac{2 \Gamma\left(\frac{m}{p}\right)}{p \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}.$$

Damit existiert ein  $C \in \mathbb{R}_{>0}$  so, dass wir für alle  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  die folgende Abschätzung erhalten:

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \int_{(\mathbb{R}_{>0})^n} \left( \prod_{k=1}^n (U_{\varepsilon,k}(u))^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{s^2 |a_{k1}|^2}{4U_{\varepsilon,k}(u)}} \right) d\mu_{p,n}(u) s^{m-1} ds \\
&= \int_0^\infty \int_{(\mathbb{R}_{>0})^n} \left( \prod_{k=1}^n (U_{\varepsilon,k}(u))^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{|a_{k1}|^2}{4U_{\varepsilon,k}(u)s^2}} \right) d\mu_{p,n}(u) s^{-(m+1)} ds \\
&= \int_0^1 \int_{(\mathbb{R}_{>0})^n} \left( \prod_{k=1}^n (U_{\varepsilon,k}(u))^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{|a_{k1}|^2}{4U_{\varepsilon,k}(u)s^2}} \right) d\mu_{p,n}(u) s^{-(m+1)} ds \\
&\quad + \int_1^\infty \int_{(\mathbb{R}_{>0})^n} \left( \prod_{k=1}^n (U_{\varepsilon,k}(u))^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{|a_{k1}|^2}{4U_{\varepsilon,k}(u)s^2}} \right) d\mu_{p,n}(u) s^{-(m+1)} ds \\
&\leq \int_0^1 \int_{(\mathbb{R}_{>0})^n} \left( \prod_{k=1}^n (U_{\varepsilon,k}(u))^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{|a_{k1}|^2}{4U_{\varepsilon,k}(u)s^2}} f_p(u_k) \right) du s^{-(m+1)} ds \\
&\quad + \int_1^\infty \left( \prod_{k=1}^n \int_0^\infty u_k^{-\frac{m}{2}} d\mu_p(u_k) \right) s^{-(m+1)} ds \\
&\stackrel{(5.20)}{\leq} \int_0^1 \int_{(\mathbb{R}_{>0})^n} \left( \prod_{k=1}^n (U_{\varepsilon,k}(u))^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{|a_{k1}|^2}{4U_{\varepsilon,k}(u)s^2}} (1+u_k)^{-1-\frac{p}{2}} \right) du s^{-(m+1)} ds + \frac{1}{m} \left( \frac{2\Gamma(\frac{m}{p})}{p\Gamma(\frac{m}{2})} \right)^n \\
&\stackrel{(5.21)}{=} \frac{1}{m} \left( \frac{2\Gamma(\frac{m}{p})}{p\Gamma(\frac{m}{2})} \right)^n \\
&\quad + \int_0^1 \int_{(\mathbb{R}_{>0})^n} \left( \prod_{k=1}^n (U_{\varepsilon,k}(u))^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{s^2 |a_{k1}|^2}{4U_{\varepsilon,k}(u)}} \left(1 + \frac{u_k}{s^2}\right)^{-1-\frac{p}{2}} \right) du s^{-(m+1)+(m-2)n} ds \\
&\leq \frac{1}{m} \left( \frac{2\Gamma(\frac{m}{p})}{p\Gamma(\frac{m}{2})} \right)^n + C \int_0^1 \left( \prod_{k=1}^n \int_0^\infty \left(1 + \frac{u_k}{s^2}\right)^{-1-\frac{p}{2}} du_k \right) s^{-(m+1)+(m-2)n} ds \\
&= \frac{1}{m} \left( \frac{2\Gamma(\frac{m}{p})}{p\Gamma(\frac{m}{2})} \right)^n + C \int_0^1 \left( \prod_{k=1}^n \int_0^\infty (1+u_k)^{-1-\frac{p}{2}} du_k \right) s^{m(n-1)-1} ds \\
&= \frac{1}{m} \left( \frac{2\Gamma(\frac{m}{p})}{p\Gamma(\frac{m}{2})} \right)^n + \frac{C}{m(n-1)} \left( \frac{2}{p} \right)^n. \quad \square
\end{aligned}$$

Wir können jetzt die zweite Volumenformel für Schnitte durch den Ursprung aufstellen. Sie ist eine Verallgemeinerung der Volumenformel von Koldobsky aus [24, S. 50] für den Fall  $m = 1$  und von Koldobsky und Zymonopoulou aus [23, S. 198] für den Fall  $m = 2$ . Bei genauer Betrachtung der Formel bemerken wir eine gewisse Ähnlichkeit zu der Volumenformel von Schnitten durch den Ursprung für den Fall  $p = \infty$ . Im nächsten Abschnitt werden wir diese Volumenformel nach unten und nach oben abschätzen.

**Satz 5.9.** Seien  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $p \in (0, 2]$  und  $g_p$  wie in Lemma 5.6 definiert. Setzen wir die Abbildung  $\gamma_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $s \mapsto \widehat{g}_p((s, 0, \dots, 0))$ , so gilt für alle  $a \in S_m^{n-1}$  die folgende Volumenformel für Schnitte durch den Ursprung:

$$(5.22) \quad A_{p,m(n-1)}(a, 0) = \frac{\kappa_{m-1}}{(2\pi)^{m-1} \Gamma\left(\frac{m(n-1)}{p} + 1\right)} \int_0^\infty \left( \prod_{j=1}^n \gamma_p(s|a_{j1}|) \right) s^{m-1} ds.$$

**Beweis.** Seien  $a \in S_m^{n-1}$  und  $B_a$  wie in Lemma 1.19 definiert. Nach Lemma 5.8 gilt für Schnitte durch den Ursprung

$$A_p(a, 0) = \frac{1}{(2\pi)^m m(n-1)} \int_{S^{mn-1} \cap \langle B_a \rangle_{\mathbb{R}}} \|\cdot\|_{2,p}^{-m(n-1)}(y) dy.$$

Mit dieser und mit Fubini ergibt sich die Gleichheit

$$\begin{aligned} & A_p(a, 0) \\ \stackrel{(\text{Lemma 5.6 (i)})}{=} & \frac{1}{(2\pi)^m \Gamma\left(\frac{m(n-1)+p}{p}\right)} \int_{S^{mn-1} \cap \langle B_a \rangle_{\mathbb{R}}} \int_0^\infty \left( \prod_{j=1}^n \widehat{g}_p(sy_j) \right) s^{m-1} ds dy \\ \stackrel{(\text{Lemma 5.5})}{=} & \frac{1}{(2\pi)^m \Gamma\left(\frac{m(n-1)+p}{p}\right)} \int_{S^{mn-1} \cap \langle B_a \rangle_{\mathbb{R}}} \int_0^\infty \left( \prod_{j=1}^n \widehat{g}_p\left(s\|y_j\|_2, 0, \dots, 0\right) \right) s^{m-1} ds dy \\ (5.23) \quad = & \frac{1}{(2\pi)^m \Gamma\left(\frac{m(n-1)+p}{p}\right)} \int_0^\infty \int_{S^{mn-1} \cap \langle B_a \rangle_{\mathbb{R}}} \left( \prod_{j=1}^n \gamma_p(s\|y_j\|_2) \right) dy s^{m-1} ds. \end{aligned}$$

Als nächstes zeigen wir, dass die Funktion  $S^{mn-1} \cap \langle B_a \rangle_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y \mapsto \prod_{j=1}^n \gamma_p(s\|y_j\|_2)$  konstant ist. Mit Lemma 1.19 (iii) ergibt sich für alle  $y \in S^{mn-1} \cap \langle B_a \rangle_{\mathbb{R}}$  die Identität

$$(5.24) \quad \prod_{j=1}^n \gamma_p(s\|y_j\|_2) = \prod_{j=1}^n \gamma_p(s|a_{j1}|).$$

Insgesamt erhalten wir mit der Gleichung  $S^{mn-1} \cap \langle B_a \rangle_{\mathbb{R}} = S^{m-1}$  und der Gleichung  $\text{vol}_{m-1}(S^{m-1}) = 2\pi\kappa_{m-1}$  die Identität

$$\begin{aligned} A_p(a, 0) & \stackrel{(5.23)}{=} \frac{1}{(2\pi)^m \Gamma\left(\frac{m(n-1)+p}{p}\right)} \int_0^\infty \int_{S^{mn-1} \cap \langle B_a \rangle_{\mathbb{R}}} \left( \prod_{j=1}^n \gamma_p(s\|y_j\|_2) \right) dy s^{m-1} ds \\ & \stackrel{(5.24)}{=} \frac{1}{(2\pi)^m \Gamma\left(\frac{m(n-1)+p}{p}\right)} \int_0^\infty \int_{S^{mn-1} \cap \langle B_a \rangle_{\mathbb{R}}} \left( \prod_{j=1}^n \gamma_p(s|a_{j1}|) \right) dy s^{m-1} ds \\ & = \frac{\kappa_{m-1}}{(2\pi)^{m-1} \Gamma\left(\frac{m(n-1)+p}{p}\right)} \int_0^\infty \left( \prod_{j=1}^n \gamma_p(s|a_{j1}|) \right) s^{m-1} ds. \end{aligned}$$

□

## 5.2 Untere und obere Schranke für Schnitte durch den Ursprung

Koldobsky zeigte in [24, S. 148] für den Fall  $m = 1$  und  $p \in (0, 2]$  die Ungleichung

$$(5.25) \quad A_{p,m(n-1)}(v_n, 0) \leq A_{p,m(n-1)}(a, 0) \leq A_{p,m(n-1)}(v_1, 0)$$

für alle  $a \in S^{n-1}$  mit  $1 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n \geq 0$ . Weiter bewiesen Koldobsky und Zymonopoulou in [23, S. 186] die Ungleichung für den Fall  $m = 2$ .

Diese Ungleichung werden wir auf den Fall  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  erweitern. Dabei ergeben sich einige technische Probleme, die wir mit den Resultaten aus Kapitel eins beseitigen werden.

Zu bemerken bleibt, dass wir uns auch hier auf die Normalenvektoren  $a \in S^{n-1}$  mit  $1 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n \geq 0$  beschränken können. Offensichtlich liefert diese Tatsache sofort die Volumenformel (5.22). Im Beweis der Ungleichung (5.25) nutzte Koldobsky für den Fall  $m = 1$  das folgende

**Lemma 5.10.** *Seien  $m \in \mathbb{N}$ ,  $p \in (0, 2]$  und  $\gamma_p$  wie in Satz 5.9 definiert. Die Funktion  $\gamma_p \circ \sqrt{\cdot}$  ist log-konvex auf  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ .*

**Beweis.** Nach Lemma 5.6 (ii) existiert ein Maß  $\mu_p$  auf  $\mathbb{R}_{>0}$  so, dass für alle  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  die folgende Identität gilt:

$$\gamma_p(s) = \widehat{g}_p((s, 0, \dots, 0)) \stackrel{(5.3)}{=} 2^{-\frac{m}{2}} \int_0^\infty u^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{s^2}{4u}} d\mu_p(u).$$

Da die Funktion  $\log \circ \gamma_p \circ \sqrt{\cdot}$  stetig auf  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  ist, folgt die Konvexität dieser Funktion aus den folgenden Bedingungen: für alle  $s, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  gelten die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \log \left( \gamma_p \left( \sqrt{\frac{s+t}{2}} \right) \right) &\leq \frac{\log(\gamma_p(\sqrt{s})) + \log(\gamma_p(\sqrt{t}))}{2} \\ \Leftrightarrow \left( \gamma_p \left( \sqrt{\frac{s+t}{2}} \right) \right)^2 &\leq \gamma_p(\sqrt{s}) \gamma_p(\sqrt{t}). \end{aligned}$$

Seien  $s, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Es ergibt sich mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left( \gamma_p \left( \sqrt{\frac{s+t}{2}} \right) \right)^2 &= 2^{-m} \left( \int_0^\infty u^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{s+t}{8u}} d\mu_p(u) \right)^2 \\ &= 2^{-m} \left( \int_0^\infty u^{-\frac{m}{4}} e^{-\frac{s}{8u}} u^{-\frac{m}{4}} e^{-\frac{t}{8u}} d\mu_p(u) \right)^2 \\ &\leq 2^{-m} \left( \int_0^\infty u^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{s}{4u}} d\mu_p(u) \right) \left( \int_0^\infty u^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{t}{4u}} d\mu_p(u) \right) \\ &= \gamma_p(\sqrt{s}) \gamma_p(\sqrt{t}). \end{aligned}$$

□

Die log-Konvexität der Abbildung  $\gamma_p \circ \sqrt{\cdot}$  ist für den Beweis der Ungleichung (5.25) auch für den Fall  $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  entscheidend.

**Satz 5.11** (Hauptsatz). *Seien  $m, n \in \mathbb{N}$  und  $p \in (0, 2]$ . Für alle Normalenvektoren  $a \in S^{n-1}$  mit  $1 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n \geq 0$  gilt die Ungleichung*

$$(5.26) \quad A_{p,m(n-1)}(v_n, 0) \leq A_{p,m(n-1)}(a, 0) \leq A_{p,m(n-1)}(v_1, 0).$$

**Beweis.** Seien  $a \in S^{n-1}$  mit  $1 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n \geq 0$  und  $\gamma_p$  wie in Satz 5.9 definiert. Nach Satz 5.9 gilt die Identität

$$A_p(a, 0) = \frac{\kappa_{m-1}}{(2\pi)^{m-1} \Gamma\left(\frac{m(n-1)}{p} + 1\right)} \int_0^\infty \left( \prod_{j=1}^n \gamma_p(sa_j) \right) s^{m-1} ds.$$

Da die Funktion  $\gamma_p \circ \sqrt{\cdot}$  nach Lemma 5.10 log-konvex auf  $\mathbb{R}_{>0}$  ist, erhalten wir die Ungleichung

$$(5.27) \quad \frac{\log(\gamma_p(\alpha_2)) - \log(\gamma_p(\alpha_3))}{\alpha_2^2 - \alpha_3^2} \leq \frac{\log(\gamma_p(\alpha_1)) - \log(\gamma_p(\alpha_2))}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}$$

für alle  $0 \leq \alpha_3 < \alpha_2 < \alpha_1$ . Es ergeben sich mit der Ungleichung (5.27) für alle  $j \in \mathbb{N}_{\leq n}$  und  $s \in \mathbb{R}_{>0}$  die Ungleichungen

$$\begin{aligned} & \frac{\log(\gamma_p(sa_j)) - \log(\gamma_p(0))}{s^2 a_j^2} \leq \frac{\log(\gamma_p(s)) - \log(\gamma_p(sa_j))}{s^2 - s^2 a_j^2} \\ \Leftrightarrow & \log(\gamma_p(sa_j))(1 - a_j^2) + \log(\gamma_p(sa_j))a_j^2 \leq \log(\gamma_p(0))(1 - a_j^2) + \log(\gamma_p(s))a_j^2 \\ \Leftrightarrow & (\gamma_p(sa_j))^{1-a_j^2} (\gamma_p(sa_j))^{a_j^2} \leq (\gamma_p(0))^{1-a_j^2} (\gamma_p(s))^{a_j^2} \\ \Leftrightarrow & \gamma_p(sa_j) \leq (\gamma_p(0))^{1-a_j^2} (\gamma_p(s))^{a_j^2}. \end{aligned}$$

Daraus folgt insgesamt für alle  $s \in \mathbb{R}_{>0}$  die Ungleichung

$$\prod_{j=1}^n \gamma_p(sa_j) \leq \prod_{j=1}^n (\gamma_p(0))^{1-a_j^2} (\gamma_p(s))^{a_j^2} = (\gamma_p(0))^{\sum_{j=1}^n (1-a_j^2)} (\gamma_p(s))^{\sum_{j=1}^n a_j^2} = (\gamma_p(0))^{n-1} \gamma_p(s).$$

Damit erhalten wir die rechte Ungleichung in (5.26).

Zu zeigen bleibt die linke Ungleichung in (5.26). Es existiert ein  $k \in \mathbb{N}_{\leq n}$  so, dass  $a_k \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \geq a_{k+1}$ . Also ergeben sich mit Ungleichung (5.27) für alle  $j \in \mathbb{N}_{\leq k}, i \in \{k+1, \dots, n\}$  und  $s \in \mathbb{R}_{>0}$  die Ungleichungen

$$\begin{aligned} & \frac{\log\left(\gamma_p\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)\right) - \log(\gamma_p(sa_i))}{\frac{s^2}{n} - s^2 a_i^2} \leq \frac{\log(\gamma_p(sa_j)) - \log\left(\gamma_p\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)\right)}{s^2 a_j^2 - \frac{s^2}{n}} \\ \Leftrightarrow & \log\left(\gamma_p\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)\right) \left(a_j^2 - \frac{1}{n}\right) + \log\left(\gamma_p\left(s\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \left(\frac{1}{n} - a_i^2\right) \\ & \leq \log(\gamma_p(sa_j)) \left(\frac{1}{n} - a_i^2\right) + \log(\gamma_p(sa_i)) \left(a_j^2 - \frac{1}{n}\right) \\ \Leftrightarrow & \left(\gamma_p\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)\right)^{a_j^2 - \frac{1}{n}} \left(\gamma_p\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)\right)^{\frac{1}{n} - a_i^2} \leq (\gamma_p(sa_j))^{\frac{1}{n} - a_i^2} (\gamma_p(sa_i))^{a_j^2 - \frac{1}{n}} \\ \Leftrightarrow & \left(\gamma_p\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)\right)^{a_j^2 - a_i^2} \leq (\gamma_p(sa_j))^{\frac{1}{n} - a_i^2} (\gamma_p(sa_i))^{a_j^2 - \frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir für alle  $s \in \mathbb{R}_{>0}$  die Ungleichungen

$$\begin{aligned}
& \prod_{j=1}^k \prod_{i=k+1}^n \left( \gamma_p \left( \frac{s}{\sqrt{n}} \right) \right)^{a_j^2 - a_i^2} \leq \prod_{j=1}^k \prod_{i=k+1}^n (\gamma_p(sa_j))^{\frac{1}{n} - a_i^2} (\gamma_p(sa_i))^{a_j^2 - \frac{1}{n}} \\
& \Leftrightarrow \left( \gamma_p \left( \frac{s}{\sqrt{n}} \right) \right)^{(n-k) \sum_{j=1}^k a_j^2 - k \sum_{i=k+1}^n a_i^2} \leq \left( \prod_{j=1}^k (\gamma_p(sa_j))^{\frac{n-k}{n} - \sum_{i=k+1}^n a_i^2} \right) \left( \prod_{i=k+1}^n (\gamma_p(sa_i))^{\sum_{j=1}^k a_j^2 - \frac{k}{n}} \right) \\
& \Leftrightarrow \left( \left( \gamma_p \left( \frac{s}{\sqrt{n}} \right) \right)^n \right)^{\sum_{j=1}^k a_j^2 - \frac{k}{n}} \leq \left( \prod_{j=1}^k \gamma_p(sa_j) \right)^{\sum_{j=1}^k a_j^2 - \frac{k}{n}} \left( \prod_{i=k+1}^n \gamma_p(sa_i) \right)^{\sum_{j=1}^k a_j^2 - \frac{k}{n}} \\
& \Leftrightarrow \left( \gamma_p \left( \frac{s}{\sqrt{n}} \right) \right)^n \leq \prod_{j=1}^n \gamma_p(sa_j). \quad \square
\end{aligned}$$

### 5.3 Volumenformeln für Schnitte und Schichten in $l_1^n(l_2^1)$

Meyer und Pajor haben im Artikel [27, S. 117] u. a. eine explizite Volumenformel für  $A_{p,m(n-1)}(\cdot, 0)$  für den Fall  $m = 1$  und  $p = 1$  angegeben und diese Formel mit stochastischen Mitteln unter Anwendung der Fourier-Umkehrformel bewiesen. Wir werden uns in diesem Abschnitt nur mit dem Fall  $m = 1$  und  $p = 1$  beschäftigen. Dafür werden wir nicht nur eine Volumenformel für Schnitte durch den Ursprung, sondern für  $A_1$  angeben, woraus wir dann die Volumenformel für  $V_1$  ableiten. Dazu bedarf es anderer Methoden als jene, die von Meyer und Pajor angewendet wurden. Diese wollen wir im Folgenden präsentieren.

Ein zentrales Hilfsmittel sind die Determinanten von Vandermonde. Deren Eigenschaften lernen wir im Beweis des nächsten Lemmas kennen.

**Lemma 5.12.** *Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $l \in (\mathbb{N}_0)_{\leq n-1}$ . Für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $x_1 > \dots > x_n > 0$  gelten die Gleichungen*

$$\sum_{j=1}^n \frac{x_j^{n+l-2}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (x_j^2 - x_k^2)} = 0, \text{ falls } n+l \text{ gerade ist} \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^n \frac{x_j^{2(n-1)}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (x_j^2 - x_k^2)} = 1.$$

**Beweis.** Seien  $n+l$  gerade und  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $x_1 > \dots > x_n > 0$ . Definieren wir die Matrix

$$V := \begin{pmatrix} x_1^{2 \cdot 0} & x_1^{2 \cdot 1} & x_1^{2 \cdot 2} & \dots & x_1^{2 \cdot (n-1)} \\ x_2^{2 \cdot 0} & x_2^{2 \cdot 1} & x_2^{2 \cdot 2} & \dots & x_2^{2 \cdot (n-1)} \\ x_3^{2 \cdot 0} & x_3^{2 \cdot 1} & x_3^{2 \cdot 2} & \dots & x_3^{2 \cdot (n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{2 \cdot 0} & x_n^{2 \cdot 1} & x_n^{2 \cdot 2} & \dots & x_n^{2 \cdot (n-1)} \end{pmatrix},$$

so ergibt sich mit Vandermonde die Gleichheit  $\det(V) = \prod_{1 \leq k < j \leq n} (x_j^2 - x_k^2)$ . Definieren wir zusätzlich die Matrizen

$$V^{(1)} := \begin{pmatrix} x_2^{2 \cdot 0} & x_2^{2 \cdot 1} & x_2^{2 \cdot 2} & \dots & x_2^{2 \cdot (n-2)} \\ x_3^{2 \cdot 0} & x_3^{2 \cdot 1} & x_3^{2 \cdot 2} & \dots & x_3^{2 \cdot (n-2)} \\ x_4^{2 \cdot 0} & x_4^{2 \cdot 1} & x_4^{2 \cdot 2} & \dots & x_4^{2 \cdot (n-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{2 \cdot 0} & x_n^{2 \cdot 1} & x_n^{2 \cdot 2} & \dots & x_n^{2 \cdot (n-2)} \end{pmatrix}, \quad V^{(n)} := \begin{pmatrix} x_1^{2 \cdot 0} & x_1^{2 \cdot 1} & x_1^{2 \cdot 2} & \dots & x_1^{2 \cdot (n-2)} \\ x_2^{2 \cdot 0} & x_2^{2 \cdot 1} & x_2^{2 \cdot 2} & \dots & x_2^{2 \cdot (n-2)} \\ x_3^{2 \cdot 0} & x_3^{2 \cdot 1} & x_3^{2 \cdot 2} & \dots & x_3^{2 \cdot (n-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n-1}^{2 \cdot 0} & x_{n-1}^{2 \cdot 1} & x_{n-1}^{2 \cdot 2} & \dots & x_{n-1}^{2 \cdot (n-2)} \end{pmatrix}$$

und

$$V^{(i)} := \begin{pmatrix} x_1^{2 \cdot 0} & x_1^{2 \cdot 1} & x_1^{2 \cdot 2} & \dots & x_1^{2 \cdot (n-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i-1}^{2 \cdot 0} & x_{i-1}^{2 \cdot 1} & x_{i-1}^{2 \cdot 2} & \dots & x_{i-1}^{2 \cdot (n-2)} \\ x_{i+1}^{2 \cdot 0} & x_{i+1}^{2 \cdot 1} & x_{i+1}^{2 \cdot 2} & \dots & x_{i+1}^{2 \cdot (n-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{2 \cdot 0} & x_n^{2 \cdot 1} & x_n^{2 \cdot 2} & \dots & x_n^{2 \cdot (n-2)} \end{pmatrix} \quad \text{für alle } 2 \leq i \leq n-1,$$

so erhalten wir wieder mit Vandermonde die Gleichheit  $\det(V^{(i)}) = \prod_{\substack{1 \leq k < j \leq n \\ k, j \neq i}} (x_j^2 - x_k^2)$  für alle

$i \in \mathbb{N}_{\leq n}$ . Mit Hilfe der Definitionen erhalten wir die folgenden Gleichung:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{x_j^{n+l-2}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (x_j^2 - x_k^2)} &= \sum_{j=1}^n \frac{x_j^{2(\frac{n+l}{2}-1)}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (x_j^2 - x_k^2)} \\ &= \frac{1}{\det(V)} \sum_{j=1}^n (-1)^{\frac{n+l}{2}+j} x_j^{2(\frac{n+l}{2}-1)} \det(V^{(j)}) \\ &= \frac{1}{\det(V)} \det \begin{pmatrix} x_1^{2 \cdot 0} & \dots & x_1^{2 \cdot (\frac{n+l}{2}-1)} & x_1^{2 \cdot (\frac{n+l}{2}-1)} & \dots & x_1^{2 \cdot (n-2)} \\ x_2^{2 \cdot 0} & \dots & x_2^{2 \cdot (\frac{n+l}{2}-1)} & x_2^{2 \cdot (\frac{n+l}{2}-1)} & \dots & x_2^{2 \cdot (n-2)} \\ x_3^{2 \cdot 0} & \dots & x_3^{2 \cdot (\frac{n+l}{2}-1)} & x_3^{2 \cdot (\frac{n+l}{2}-1)} & \dots & x_3^{2 \cdot (n-2)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{2 \cdot 0} & \dots & x_n^{2 \cdot (\frac{n+l}{2}-1)} & x_n^{2 \cdot (\frac{n+l}{2}-1)} & \dots & x_n^{2 \cdot (n-2)} \end{pmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

und

$$\sum_{j=1}^n \frac{x_j^{2(n-1)}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (x_j^2 - x_k^2)} = \frac{1}{\det(V)} \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} x_j^{2(n-1)} \det(V^{(j)}) = 1. \quad \square$$

Weiter möchten wir wie im Beweis der Volumenformel für  $A_\infty$  vorgehen. Dort haben wir uns die Fourier-Transformierte  $\widehat{\chi_{\overline{B}_2(0,1)}}$  angeschaut, die sich aus der Fourier-Transformierten von  $A_\infty$  ergeben hat. So gehen wir in diesem Fall jetzt auch vor. Dazu betrachten wir die Fourier-Transformation der Funktion  $\chi_{\overline{B}_1(0,1)}$ .

**Lemma 5.13.** Für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $x_1 > \dots > x_n > 0$  gilt die Identität

$$(5.28) \quad \widehat{\chi_{\overline{B}_1(0,1)}}(x) = \begin{cases} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} 2^n (-1)^{\frac{n}{2}} \sum_{j=1}^n \frac{x_j^{n-2} \cos(x_j)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (x_j^2 - x_k^2)}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ (2\pi)^{-\frac{n}{2}} 2^n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sum_{j=1}^n \frac{x_j^{n-2} \sin(x_j)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (x_j^2 - x_k^2)}, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

**Beweis.** Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $x_1 > \dots > x_n > 0$ . Es gilt mit dem Satz von Fubini die Gleichung



$$\begin{aligned}
\widehat{\chi_{\overline{B}_1(0,1)}}(x) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\overline{B}_1(0,1)}(y) e^{-i\langle x, y \rangle} dy \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,1]}(|y_1|) e^{-ix_1 y_1} \\
&\quad \cdot \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,1-|y_1|]}(|y_2|) e^{-ix_2 y_2} \cdot \dots \cdot \int_{\mathbb{R}} \chi_{\left[0,1-\sum_{j=1}^{n-1} |y_j|\right]}(|y_n|) e^{-ix_n y_n} dy_n \dots dy_1 \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{-1}^1 e^{-ix_1 y_1} \int_{-1+|y_1|}^{1-|y_1|} e^{-ix_2 y_2} \cdot \dots \cdot \int_{-1+\sum_{j=1}^{n-1} |y_j|}^{1-\sum_{j=1}^{n-1} |y_j|} e^{-ix_n y_n} dy_n \dots dy_1 \\
&\stackrel{(*)}{=} \begin{cases} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} 2^n (-1)^{\frac{n}{2}} \sum_{j=1}^n \frac{x_j^{n-2} \cos(x_j)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (x_j^2 - x_k^2)}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ (2\pi)^{-\frac{n}{2}} 2^n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sum_{j=1}^n \frac{x_j^{n-2} \sin(x_j)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (x_j^2 - x_k^2)}, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Zu (\*): (Induktion über  $n$ )

Induktionsanfang: Es gelten für  $n = 1$  und  $n = 2$  die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\widehat{\chi_{\overline{B}_1(0,1)}}(x) &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-1}^1 e^{-ix_1 y_1} dy_1 \\
&= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} 2 \frac{\sin(x_1)}{x_1}, \\
\widehat{\chi_{\overline{B}_1(0,1)}}(x) &= (2\pi)^{-1} \int_{-1}^1 e^{-ix_1 y_1} \int_{-1+|y_1|}^{1-|y_1|} e^{-ix_2 y_2} dy_2 dy_1 \\
&= (2\pi)^{-1} \int_{-1}^1 e^{-ix_1 y_1} \frac{2 \sin(x_2(1-|y_1|))}{x_2} dy_1 \\
&= (2\pi)^{-1} 2^2 \left( \frac{\cos(x_1)}{x_1^2 - x_2^2} + \frac{\cos(x_2)}{x_2^2 - x_1^2} \right).
\end{aligned}$$

Induktionsschritt: Es gelte die Identität

$$(\text{I.V.}) \quad \widehat{\chi_{\overline{B}_1(0,1)}}(x) = \begin{cases} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} 2^n (-1)^{\frac{n}{2}} \sum_{j=1}^n \frac{x_j^{n-2} \cos(x_j)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (x_j^2 - x_k^2)}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ (2\pi)^{-\frac{n}{2}} 2^n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sum_{j=1}^n \frac{x_j^{n-2} \sin(x_j)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (x_j^2 - x_k^2)}, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Für ungerades  $n$  gilt die Gleichung

$$\begin{aligned}
& \widehat{\chi_{\overline{B}_1(0,1)}}(x) \\
&= (2\pi)^{-\frac{n+1}{2}} \int_{-1}^1 e^{-ix_1 y_1} \int_{-1+|y_1|}^{1-|y_1|} e^{-ix_2 y_2} \dots \int_{-1+\sum_{j=1}^n |y_j|}^{1-\sum_{j=1}^n |y_j|} e^{-ix_n y_n} dy_{n+1} \dots dy_1 \\
&\stackrel{(\text{I.V.})}{=} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-1}^1 e^{-ix_1 y_1} \left( (2\pi)^{-\frac{n}{2}} 2^n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sum_{j=2}^{n+1} \frac{x_j^{n-2} \sin(x_j(1-|y_1|))}{\prod_{\substack{k=2 \\ k \neq j}}^{n+1} (x_j^2 - x_k^2)} dy_1 \right) \\
&= (2\pi)^{-\frac{n+1}{2}} 2^n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sum_{j=2}^{n+1} \frac{x_j^{n-2}}{\prod_{\substack{k=2 \\ k \neq j}}^{n+1} (x_j^2 - x_k^2)} \int_{-1}^1 \sin(x_j(1-|y_1|)) e^{-ix_1 y_1} dy_1 \\
&= (2\pi)^{-\frac{n+1}{2}} 2^n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sum_{j=2}^{n+1} \frac{x_j^{n-2}}{\prod_{\substack{k=2 \\ k \neq j}}^{n+1} (x_j^2 - x_k^2)} \frac{2x_j(\cos(x_1) - \cos(x_j))}{x_j^2 - x_1^2} \\
&= (2\pi)^{-\frac{n+1}{2}} 2^{n+1} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left( \cos(x_1) \sum_{j=2}^{n+1} \frac{x_j^{n+1-2}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n+1} (x_j^2 - x_k^2)} - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{x_j^{n+1-2} \cos(x_j)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n+1} (x_j^2 - x_k^2)} \right) \\
&\stackrel{(\text{Lemma 5.12})}{=} (2\pi)^{-\frac{n+1}{2}} 2^{n+1} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left( \frac{x_1^{n+1-2} \cos(x_1)}{\prod_{k=2}^{n+1} (x_1^2 - x_k^2)} + \sum_{j=2}^{n+1} \frac{x_j^{n+1-2} \cos(x_j)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n+1} (x_j^2 - x_k^2)} \right) \\
&= (2\pi)^{-\frac{n+1}{2}} 2^{n+1} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{x_j^{n+1-2} \cos(x_j)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n+1} (x_j^2 - x_k^2)}.
\end{aligned}$$

Für gerades  $n$  gilt die Gleichung

$$\begin{aligned}
& \widehat{\chi_{\overline{B}_1(0,1)}}(x) \\
&= (2\pi)^{-\frac{n+1}{2}} \int_{-1}^1 e^{-ix_1 y_1} \int_{-1+|y_1|}^{1-|y_1|} e^{-ix_2 y_2} \dots \int_{-1+\sum_{j=1}^n |y_j|}^{1-\sum_{j=1}^n |y_j|} e^{-ix_n y_n} dy_{n+1} \dots dy_1 \\
&\stackrel{(\text{I.V.})}{=} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-1}^1 e^{-ix_1 y_1} \left( (2\pi)^{-\frac{n}{2}} 2^n (-1)^{\frac{n}{2}} \sum_{j=2}^{n+1} \frac{x_j^{n-2} \cos(x_j(1-|y_1|))}{\prod_{\substack{k=2 \\ k \neq j}}^{n+1} (x_j^2 - x_k^2)} dy_1 \right) dy_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (2\pi)^{-\frac{n+1}{2}} 2^n (-1)^{\frac{n}{2}} \sum_{j=2}^{n+1} \frac{x_j^{n-2}}{\prod_{\substack{k=2 \\ k \neq j}}^{n+1} (x_j^2 - x_k^2)} \int_{-1}^1 \cos(x_j(1 - |y_1|)) e^{-ix_1 y_1} dy_1 \\
&= (2\pi)^{-\frac{n+1}{2}} 2^n (-1)^{\frac{n}{2}} \sum_{j=2}^{n+1} \frac{x_j^{n-2}}{\prod_{\substack{k=2 \\ k \neq j}}^{n+1} (x_j^2 - x_k^2)} \frac{2(x_1 \sin(x_1) - x_j \sin(x_j))}{x_j^2 - x_1^2} \\
&= (2\pi)^{-\frac{n+1}{2}} 2^{n+1} (-1)^{\frac{n}{2}} \left( -x_1 \sin(x_1) \sum_{j=2}^{n+1} \frac{x_j^{n-2}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n+1} (x_j^2 - x_k^2)} + \sum_{j=2}^{n+1} \frac{x_j^{n+1-2} \sin(x_j)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n+1} (x_j^2 - x_k^2)} \right) \\
&\stackrel{(\text{Lemma 5.12})}{=} (2\pi)^{-\frac{n+1}{2}} 2^{n+1} (-1)^{\frac{n}{2}} \left( \frac{x_1^{n+1-2} \sin(x_1)}{\prod_{k=2}^{n+1} (x_1^2 - x_k^2)} + \sum_{j=2}^{n+1} \frac{x_j^{n+1-2} \sin(x_j)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n+1} (x_j^2 - x_k^2)} \right) \\
&= (2\pi)^{-\frac{n+1}{2}} 2^{n+1} (-1)^{\frac{n+1-1}{2}} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{x_j^{n+1-2} \sin(x_j)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n+1} (x_j^2 - x_k^2)}. \quad \square
\end{aligned}$$

Für das Berechnen der Fourier-Transformierten von  $A_\infty$  greifen wir auf die Fourier-Transformierte von  $\chi_{\overline{B}_1(0,1)}$  zurück. Mit Hilfe der Fourier-Umkehrformel und des Residuensatzes erhalten wir dann die Volumenformel für  $A_\infty$ .

**Satz 5.14.** *Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $a \in S^{n-1}$  mit  $1 > a_1 > \dots > a_n > 0$ . Definieren wir  $x_+ := \max(x, 0)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , so gilt für alle  $t \in \mathbb{R}$  die Volumenformel für Schnitte*

$$(5.29) \quad A_{1,n-1}(a, t) = \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n-2} (a_j - t)_+^{n-1}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)}$$

und für alle  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  gilt die Volumenformel für Schichten

$$(5.30) \quad V_{1,n}(a, t) = \frac{2^n}{n!} \left( 1 - \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n-2} (a_j - t)_+^{n-1}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)} \right).$$

**Beweis.** Sei  $t \in \mathbb{R}$ . Es gilt die Gleichheit

$$A_1(a, t) = \int_{\langle a, x \rangle_{\mathbb{R}} = t} \chi_{\overline{B}_1(0,1)}(x) dx.$$

Mit Fubini und der Fourier-Transformation ergibt sich für alle  $s \in \mathbb{R}$  die Gleichung

$$\widehat{A_1}(a, s) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} A_1(a, t) e^{-its} dt$$

$$\begin{aligned}
&= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\langle a, x \rangle_{\mathbb{R}}=t} \chi_{\overline{B_1(0,1)}}(x) dx e^{-its} dt \\
&= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\overline{B_1(0,1)}}(x) e^{-is\langle a, x \rangle_{\mathbb{R}}} dx \\
&= (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \widehat{\chi_{\overline{B_1(0,1)}}}(sa) \\
&\stackrel{(\text{Lemma 5.13})}{=} \begin{cases} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} 2^n (-1)^{\frac{n}{2}} \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n-2} \cos(a_j s)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)} s^{-n}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ (2\pi)^{-\frac{1}{2}} 2^n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n-2} \sin(a_j s)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)} s^{-n}, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Stetigkeit von  $\widehat{A_1}(a, \cdot)$  in  $s = 0$ : Wir erhalten für alle  $j, l \in \mathbb{N}_{\leq n}$  die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{d^l}{ds^l}(\cos(a_j s)) &= \begin{cases} (-1)^{\frac{l}{2}} a_j^l \cos(a_j s), & \text{falls } l \text{ gerade,} \\ (-1)^{\frac{l-1}{2}} a_j^l \sin(a_j s), & \text{falls } l \text{ ungerade} \end{cases} \quad \text{und} \\
\frac{d^l}{ds^l}(\sin(a_j s)) &= \begin{cases} (-1)^{\frac{l}{2}} a_j^l \sin(a_j s), & \text{falls } l \text{ gerade,} \\ (-1)^{\frac{l-1}{2}} a_j^l \cos(a_j s), & \text{falls } l \text{ ungerade.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für alle  $l \in (\mathbb{N}_0)_{\leq n-1}$  und gerades  $n$  die Identität

$$\begin{aligned}
\frac{d^l}{ds^l} \Big|_{s=0} \left( \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n-2} \cos(a_j s)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)} \right) &= \begin{cases} (-1)^{\frac{l}{2}} \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n+l-2} \cos(a_j s)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)} \Big|_{s=0}, & \text{falls } l \text{ gerade,} \\ (-1)^{\frac{l-1}{2}} \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n+l-2} \sin(a_j s)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)} \Big|_{s=0}, & \text{falls } l \text{ ungerade} \end{cases} \\
&= \begin{cases} (-1)^{\frac{l}{2}} \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n+l-2}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)}, & \text{falls } l \text{ gerade,} \\ 0, & \text{falls } l \text{ ungerade} \end{cases} \\
&\stackrel{(\text{Lemma 5.12})}{=} 0
\end{aligned}$$

und für ungerades  $n$  gilt die Identität

$$\begin{aligned}
 \frac{d^l}{ds^l} \Big|_{s=0} \left( \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n-2} \sin(a_j s)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)} \right) &= \begin{cases} (-1)^{\frac{l}{2}} \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n+l-2} \sin(a_j s)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)} \Big|_{s=0}, & \text{falls } l \text{ gerade,} \\ (-1)^{\frac{l-1}{2}} \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n+l-2} \cos(a_j s)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)} \Big|_{s=0}, & \text{falls } l \text{ ungerade} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 0, & \text{falls } l \text{ gerade,} \\ (-1)^{\frac{l-1}{2}} \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n+l-2}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)}, & \text{falls } l \text{ ungerade} \end{cases} \\
 &\stackrel{(\text{Lemma 5.12})}{=} 0.
 \end{aligned}$$

Weiterhin gilt für gerades  $n$  die Gleichheit

$$\begin{aligned}
 \frac{d^n}{ds^n} \Big|_{s=0} \left( \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n-2} \cos(a_j s)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)} \right) &= (-1)^{\frac{n}{2}} \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{2(n-1)} \cos(a_j s)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)} \Big|_{s=0} \\
 &= (-1)^{\frac{n}{2}} \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{2(n-1)}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)} \\
 &\stackrel{(\text{Lemma 5.12})}{=} (-1)^{\frac{n}{2}}
 \end{aligned}$$

und für ungerades  $n$  ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned}
 \frac{d^n}{ds^n} \Big|_{s=0} \left( \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n-2} \sin(a_j s)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)} \right) &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{2(n-1)} \cos(a_j s)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)} \Big|_{s=0} \\
 &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{2(n-1)}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)} \\
 &\stackrel{(\text{Lemma 5.12})}{=} (-1)^{\frac{n-1}{2}}.
 \end{aligned}$$

Mit l'Hospital erhalten wir insgesamt die Identität

$$\begin{aligned}
& \lim_{s \rightarrow 0} \widehat{A}_1(a, s) \\
&= \begin{cases} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} 2^n (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{d^n}{ds^n} \Big|_{s=0} \left( \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n-2} \cos(a_j s)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)} \right) \frac{d^n}{ds^n} \Big|_{s=0} (s^{-n}), & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ (2\pi)^{-\frac{1}{2}} 2^n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{d^n}{ds^n} \Big|_{s=0} \left( \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n-2} \sin(a_j s)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)} \right) \frac{d^n}{ds^n} \Big|_{s=0} (s^{-n}), & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \\
&= \begin{cases} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} 2^n (-1)^{\frac{n}{2}}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ (2\pi)^{-\frac{1}{2}} 2^n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n!}, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Für den weiteren Verlauf sei ohne Einschränkung  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Es ergibt sich mit der Fourier-Umkehrformel für gerades  $n$  die Gleichheit

$$\begin{aligned}
& A_1(a, t) \\
&= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{A}_1(a, s) e^{ist} ds \\
&= \pi^{-1} 2^{n-1} (-1)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n-2} \cos(a_j s)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)} s^{-n} \cos(st) ds \\
&= \pi^{-1} 2^{n-2} (-1)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n-2}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)} \\
&\quad \cdot \frac{\cos(|a_j + t|s) + (\text{sign}(a_j - t))^n \cos(|a_j - t|s)}{s^n} ds \\
(5.31) \quad &= \text{Re} \left( \pi^{-1} 2^{n-2} (-1)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n-2}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)} \frac{e^{i|a_j + t|s} + (\text{sign}(a_j - t))^n e^{i|a_j - t|s}}{s^n} ds \right)
\end{aligned}$$

und für ungerades  $n$  gilt die Gleichheit

$$\begin{aligned}
A_1(a, t) &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{A}_1(a, s) e^{ist} ds \\
&= \pi^{-1} 2^{n-1} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n-2} \sin(a_j s)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)} s^{-n} \cos(st) ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \pi^{-1} 2^{n-2} (-1)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n-2}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)} \\
 &\quad \cdot \frac{\sin(|a_j + t|s) + (\text{sign}(a_j - t))^n \sin(|a_j - t|s)}{s^n} ds \\
 (5.32) &= \text{Im} \left( \pi^{-1} 2^{n-2} (-1)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n-2}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)} \frac{e^{i|a_j + t|s} + (\text{sign}(a_j - t))^n e^{i|a_j - t|s}}{s^n} ds \right).
 \end{aligned}$$

Sei  $j \in \mathbb{N}_{\leq n}$ . Die Funktion  $f_j : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto (\text{sign}(a_j \pm t))^n e^{i|a_j \pm t|z} z^{-n}$  hat einen Pol  $n$ -ter Ordnung in 0. Definieren wir für alle  $R \in \mathbb{R}_{>0}$  die Integrationswege

$$\begin{aligned}
 \gamma_{1,R} &: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, s \mapsto (1-s)R^{-1} + Rs, \\
 \gamma_{2,R} &: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}, s \mapsto Re^{is}, \\
 \gamma_{3,R} &: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, s \mapsto (s-1)R - R^{-1}s \quad \text{und} \\
 \gamma_{4,R} &: [\pi, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, s \mapsto R^{-1}e^{is},
 \end{aligned}$$

so integrieren wir  $f_j$  über den Weg  $\Gamma_R := \gamma_{1,R} + \gamma_{2,R} + \gamma_{3,R} + \gamma_{4,R}$  (siehe Abb. 5.2).

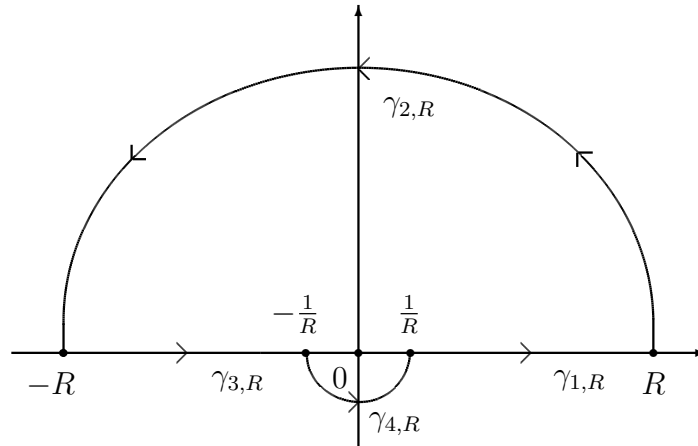


Abbildung 5.2: Integrationsweg  $\Gamma_R = \gamma_{1,R} + \gamma_{2,R} + \gamma_{3,R} + \gamma_{4,R}$

Mit dem Residuensatz erhalten wir zunächst für alle  $R \in \mathbb{R}_{>0}$  die Gleichung

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_R} f_j(z) dz &= 2\pi i \text{res}_0(f_j) \\
 &= \frac{2\pi i}{(n-1)!} \left. \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \right|_{z=0} \left( (\text{sign}(a_j \pm t))^n e^{i|a_j \pm t|z} \right) \\
 &= \frac{2\pi i^n}{(n-1)!} (\text{sign}(a_j \pm t))^n |a_j \pm t|^{n-1} \\
 (5.33) \quad &= \begin{cases} \frac{2\pi(-1)^{\frac{n}{2}}}{(n-1)!} (\text{sign}(a_j \pm t))^n |a_j \pm t|^{n-1}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \frac{2\pi i(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{(n-1)!} (\text{sign}(a_j \pm t))^n |a_j \pm t|^{n-1}, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Als nächstes zeigen wir die Gleichheit

$$(5.34) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \int_{\gamma_{2,R}} f_j(z) dz \right) = 0.$$

Es gilt die Ungleichung

$$0 \leq \left| \int_{\gamma_{2,R}} f_j(z) dz \right| = R^{-(n+1)} \left| \int_0^1 \frac{e^{i|a_j \pm t| R e^{is}}}{e^{i(n-1)s}} ds \right| \leq R^{-(n+1)} \int_0^1 e^{-|a_j \pm t| R \operatorname{Im}(e^{is})} ds \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Weiter erhalten wir für gerades  $n$  die Gleichung

$$(5.35) \quad \begin{aligned} \int_{\gamma_{4,R}} f_j(z) dz &= (\operatorname{sign}(a_j \pm t))^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k |a_j \pm t|^k}{k!} \int_{\gamma_{4,R}} z^{k-n} dz \\ &= (\operatorname{sign}(a_j \pm t))^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{k+1} |a_j \pm t|^k}{k!} R^{n-1-k} \int_{\pi}^{2\pi} e^{i(k+1-n)s} ds \\ &= (\operatorname{sign}(a_j \pm t))^n \left( \sum_{k=0}^{n-2} \frac{i^{k+1} |a_j \pm t|^k}{k!} R^{n-1-k} \left[ \frac{e^{i(k+1-n)s}}{i(k+1-n)} \right]_{\pi}^{2\pi} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi i^n |a_j \pm t|^{n-1}}{(n-1)!} + \underbrace{\sum_{k=n}^{\infty} \frac{i^{k+1} |a_j \pm t|^k}{k!} R^{n-1-k} \int_{\pi}^{2\pi} e^{i(k+1-n)s} ds}_{\xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0} \right). \end{aligned}$$

Weiterhin berechnen wir den Term in (5.35). Es gilt die Identität

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n-2} \frac{i^{k+1} |a_j \pm t|^k}{k!} R^{n-1-k} \left[ \frac{e^{i(k+1-n)s}}{i(k+1-n)} \right]_{\pi}^{2\pi} + \frac{\pi i^n |a_j \pm t|^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{i^k |a_j \pm t|^k}{k!(k+1-n)} R^{n-1-k} \left( e^{2\pi i(k+1-n)} - e^{\pi i(k+1-n)} \right) + \frac{\pi (-1)^{\frac{n}{2}} |a_j \pm t|^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{i^k |a_j \pm t|^k}{k!(k+1-n)} R^{n-1-k} \left( 1 - (-1)^{k+1-n} \right) + \frac{\pi (-1)^{\frac{n}{2}} |a_j \pm t|^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= 2 \sum_{l=0}^{\frac{n}{2}-1} \frac{(-1)^l |a_j \pm t|^{2l}}{(2l)!(2l+1-n)} R^{n-1-2l} + \frac{\pi (-1)^{\frac{n}{2}} |a_j \pm t|^{n-1}}{(n-1)!} \end{aligned}$$



und für ungerades  $n$  gilt die Identität

$$\begin{aligned}
 & \int_{\gamma_{4,R}} f_j(z) dz \\
 = & i(\text{sign}(a_j \pm t))^n \left( 2 \sum_{l=0}^{\frac{n-1}{2}-1} \frac{(-1)^l |a_j \pm t|^{2l+1}}{(2l+1)!(2(l+1)-n)} R^{n-2(l+1)} \right. \\
 & \left. + \frac{\pi(-1)^{\frac{n-1}{2}} |a_j \pm t|^{n-1}}{(n-1)!} + \underbrace{\sum_{k=n}^{\infty} \frac{i^k |a_j \pm t|^k}{k!} R^{n-1-k} \int_{\pi}^{2\pi} e^{i(k+1-n)s} ds}_{\xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0} \right).
 \end{aligned}$$

Aus dieser und aus der Stetigkeit von  $\widehat{A}_1(a, \cdot)$  in 0 folgt für gerades  $n$  die Gleichung

$$\begin{aligned}
 & \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \pi^{-1} 2^{n-2} (-1)^{\frac{n}{2}} \int_{\gamma_{4,R}} \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n-2}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)} \frac{e^{i|a_j+t|z} + (\text{sign}(a_j - t))^n e^{i|a_j-t|z}}{z^n} dz \right) \\
 = & \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \pi^{-1} 2^{n-1} (-1)^{\frac{n}{2}} \sum_{l=0}^{\frac{n}{2}-1} \left( \frac{(-1)^l R^{n-1-2l}}{(2l)!(2l+1-n)} \right. \right. \\
 & \left. \left. \cdot \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n-2} (|a_j + t|^{2l} + (\text{sign}(a_j - t))^n |a_j - t|^{2l})}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)} \right) \right) \\
 & + \frac{2^{n-2}}{(n-1)!} \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n-2} (|a_j + t|^{n-1} + (\text{sign}(a_j - t))^n |a_j - t|^{n-1})}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)} \\
 (5.36) = & \frac{2^{n-2}}{(n-1)!} \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n-2} (|a_j + t|^{n-1} + (\text{sign}(a_j - t))^n |a_j - t|^{n-1})}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)}
 \end{aligned}$$

und für ungerades  $n$  ergibt sich die Gleichung

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left( \pi^{-1} 2^{n-2} (-1)^{\frac{n}{2}} \int_{\gamma_{4,R}} \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n-2}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)} \frac{e^{i|a_j+t|z} + (\text{sign}(a_j - t))^n e^{i|a_j-t|z}}{z^n} dz \right)$$

$$\begin{aligned}
&= i \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \pi^{-1} 2^{n-1} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sum_{l=0}^{\frac{n-1}{2}-1} \left( \frac{(-1)^l R^{n-2(l+1)}}{(2l+1)!(2(l+1)-n)} \right. \right. \\
&\quad \cdot \left. \left. \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n-2} \left( |a_j + t|^{2l+1} + (\text{sign}(a_j - t))^n |a_j - t|^{2l+1} \right)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)} \right) \right) \\
&\quad + i \frac{2^{n-2}}{(n-1)!} \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n-2} \left( |a_j + t|^{n-1} + (\text{sign}(a_j - t))^n |a_j - t|^{n-1} \right)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)} \\
(5.37) &= i \frac{2^{n-2}}{(n-1)!} \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n-2} \left( |a_j + t|^{n-1} + (\text{sign}(a_j - t))^n |a_j - t|^{n-1} \right)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)}.
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir für gerades  $n$  die Gleichung

$$\begin{aligned}
&\frac{2^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n-2} \left( |a_j + t|^{n-1} + (\text{sign}(a_j - t))^n |a_j - t|^{n-1} \right)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)} \\
&\stackrel{(5.33)}{=} \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \pi^{-1} 2^{n-2} (-1)^{\frac{n}{2}} \int_{\Gamma_R} \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n-2}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)} \frac{e^{i|a_j+t|z} + (\text{sign}(a_j - t))^n e^{i|a_j-t|z}}{z^n} dz \right) \\
&= \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \pi^{-1} 2^{n-2} (-1)^{\frac{n}{2}} \int_{\gamma_{1,R}} \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n-2}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)} \frac{e^{i|a_j+t|z} + (\text{sign}(a_j - t))^n e^{i|a_j-t|z}}{z^n} dz \right) \\
&\quad + \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \pi^{-1} 2^{n-2} (-1)^{\frac{n}{2}} \int_{\gamma_{2,R}} \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n-2}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)} \frac{e^{i|a_j+t|z} + (\text{sign}(a_j - t))^n e^{i|a_j-t|z}}{z^n} dz \right) \\
&\quad \underbrace{\hspace{10cm}}_{\stackrel{(5.34)}{=} 0} \\
&\quad + \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \pi^{-1} 2^{n-2} (-1)^{\frac{n}{2}} \int_{\gamma_{3,R}} \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n-2}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)} \frac{e^{i|a_j+t|z} + (\text{sign}(a_j - t))^n e^{i|a_j-t|z}}{z^n} dz \right) \\
&\quad + \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \pi^{-1} 2^{n-2} (-1)^{\frac{n}{2}} \int_{\gamma_{4,R}} \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n-2}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)} \frac{e^{i|a_j+t|z} + (\text{sign}(a_j - t))^n e^{i|a_j-t|z}}{z^n} dz \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(5.36)}{=} \pi^{-1} 2^{n-2} (-1)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n-2}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)} \frac{e^{i|a_j+t|s} + (\text{sign}(a_j - t))^n e^{i|a_j-t|s}}{s^n} ds \\
& \quad + \frac{2^{n-2}}{(n-1)!} \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n-2} \left( |a_j+t|^{n-1} + (\text{sign}(a_j - t))^n |a_j-t|^{n-1} \right)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)}
\end{aligned}$$

und wieder mit Gleichung (5.33) und (5.34) für ungerades  $n$  die Identität

$$\begin{aligned}
& i \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n-2} \left( |a_j+t|^{n-1} + (\text{sign}(a_j - t))^n |a_j-t|^{n-1} \right)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)} \\
& \stackrel{(5.37)}{=} \pi^{-1} 2^{n-2} (-1)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n-2}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)} \frac{e^{i|a_j+t|s} + (\text{sign}(a_j - t))^n e^{i|a_j-t|s}}{s^n} ds \\
& \quad + i \frac{2^{n-2}}{(n-1)!} \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n-2} \left( |a_j+t|^{n-1} + (\text{sign}(a_j - t))^n |a_j-t|^{n-1} \right)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)}.
\end{aligned}$$

Die letzten beiden Gleichungen sind äquivalent zu der Identität

$$\begin{aligned}
& \pi^{-1} 2^{n-2} (-1)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n-2}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)} \frac{e^{i|a_j+t|s} + (\text{sign}(a_j - t))^n e^{i|a_j-t|s}}{s^n} ds \\
& = \begin{cases} \frac{2^{n-2}}{(n-1)!} \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n-2} \left( |a_j+t|^{n-1} + (\text{sign}(a_j - t))^n |a_j-t|^{n-1} \right)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ i \frac{2^{n-2}}{(n-1)!} \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n-2} \left( |a_j+t|^{n-1} + (\text{sign}(a_j - t))^n |a_j-t|^{n-1} \right)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)}, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Gleichheit

$$A_1(a, t) \stackrel{(5.31)}{\stackrel{(5.32)}{=}} \frac{2^{n-2}}{(n-1)!} \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n-2} \left( |a_j+t|^{n-1} + (\text{sign}(a_j - t))^n |a_j-t|^{n-1} \right)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2^{n-2}}{(n-1)!} \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n-2}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)} \left( \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} a_j^{n-1-l} t^l \right. \\
&\quad \left. + (\text{sign}(a_j - t))^n \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} (\text{sign}(a_j - t) a_j)^{n-1-l} (-\text{sign}(a_j - t) t)^l \right) \\
&= \frac{2^{n-2}}{(n-1)!} \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} t^l \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{2n-3-l}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)} \left( 1 + (-1)^l \text{sign}(a_j - t) \right) \\
&\stackrel{(\text{Lemma 5.12})}{=} \frac{2^{n-2}}{(n-1)!} \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} t^l \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{2n-3-l}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)} (-1)^l 2 \chi_{\mathbb{R}_{>0}}(a_j - t) \\
&= \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n-2}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)} \chi_{\mathbb{R}_{>0}}(a_j - t) \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} a_j^{n-1-l} (-t)^l \\
&= \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n-2} (a_j - t)_+^{n-1}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)}.
\end{aligned}$$

Sei nun  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Es gilt die Gleichung

$$\begin{aligned}
V_1(a, t) &= 2 \int_0^t A_1(a, s) ds \\
&= \frac{2^n}{(n-1)!} \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n-2}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)} \int_0^t (a_j - s)_+^{n-1} ds \\
&= \frac{2^n}{n!} \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n-2}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)} \left( a_j^n - (a_j - t)_+^n \right) \\
&= \frac{2^n}{n!} \left( \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{2(n-1)}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)} - \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n-2} (a_j - t)_+^n}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)} \right) \\
&\stackrel{(\text{Lemma 5.12})}{=} \frac{2^n}{n!} \left( 1 - \sum_{j=1}^n \frac{a_j^{n-2} (a_j - t)_+^n}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (a_j^2 - a_k^2)} \right). \quad \square
\end{aligned}$$

(5.38)

## 5.4 Extrema von Schnitten und Schichten in $l_1^2(l_2^1)$ und $l_1^3(l_2^1)$

König und Koldobsky haben sich in [19, S. 5] mit den globalen Minima und Maxima der Funktionen  $A_{\infty, m(n-1)}(\cdot, t)$  und  $V_{\infty, mn}(\cdot, t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}_{>0}$  für den Fall  $m = 1$  und  $n \in \{2, 3\}$  beschäftigt. Dieses wollen wir in diesem Abschnitt für die Funktionen  $A_{1, m(n-1)}$  und  $V_{1, mn}$  machen, d. h. wir stellen die globalen Minima und Maxima für die Funktionen  $A_{1, m(n-1)}(\cdot, t)$  und  $V_{1, mn}(\cdot, t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}_{>0}$  für den Fall  $m = 1$  und  $n \in \{2, 3\}$  auf. Dazu werden wir die Volumenformel für  $A_{1, m(n-1)}$  und  $V_{1, mn}$  aus Satz 5.14 entscheidend einbringen. Wir beginnen zunächst mit der Funktion  $A_{1,1}$ .

**Satz 5.15.** *Seien  $m = 1$  und  $n = 2$ . Für alle  $a \in S_1^1 = \{a \in S^1 : 1 \geq a_1 \geq a_2 \geq 0\}$  und  $t \in \mathbb{R}_{>a_1}$  gilt  $A_{1, m(n-1)}(a, t) = 0$ . In Abhängigkeit des Parameters  $t \in [0, 1]$  erhalten wir die nachfolgenden absoluten Minima und Maxima der Funktion  $A_{1, m(n-1)}(\cdot, t)$  auf  $S_1^1$ :*

Absolute Minima von $A_{1,1}(\cdot, t)$ auf $S_1^1$		
$t$	$a_{Min}$	$A_{1,1}(a_{Min}, t)$
$\left[0, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\sqrt{2}$
$\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$	$(1, 0)$	$2(1 - t)$
$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$	$\left\{\left(a_1, \sqrt{1 - a_1^2}\right) : a_1 \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, t\right]\right\}$	0

Absolute Maxima von $A_{1,1}(\cdot, t)$ auf $S_1^1$		
$t$	$a_{Max}$	$A_{1,1}(a_{Max}, t)$
$\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$	$(\sqrt{1 - t^2}, t)$	$\frac{2}{t + \sqrt{1 - t^2}}$
$\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{4}\right]$	$\left(t + \sqrt{t^2 - \frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2} - 2t\left(t - \sqrt{t^2 - \frac{1}{2}}\right)}\right)$	$t - \sqrt{t^2 - \frac{1}{2}}$
$\left[\frac{3}{4}, 1\right]$	$(1, 0)$	$2(1 - t)$

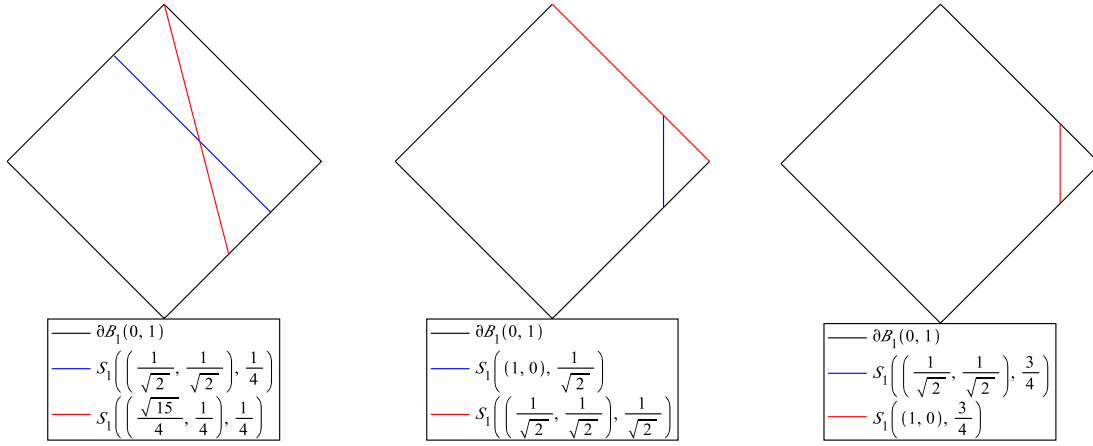


Abbildung 5.3: ■ Minima und ■ Maxima von  $A_{1,1}(\cdot, t)$  auf  $S_1^1$

**Beweis.** Zunächst berechnen wir die Funktionswerte  $A_1\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), t\right)$  und  $A_1((1, 0), t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}_{>0}$ . Es gilt für alle  $x \in \mathbb{R}^2$  die Identität

$$\begin{aligned}
 \widehat{\chi_{\overline{B}_1(0,1)}}(x) &= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{\overline{B}_1(0,1)}(y) e^{-i\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}}} dy \\
 &= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,1]}(|y_1|) e^{-ix_1 y_1} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,1-|y_1|]}(|y_2|) e^{-ix_2 y_2} dy_2 dy_1 \\
 &= (2\pi)^{-1} \int_{-1}^1 e^{-ix_1 y_1} \int_{-1+|y_1|}^{1-|y_1|} e^{-ix_2 y_2} dy_2 dy_1 \\
 &= \begin{cases} (2\pi)^{-1} \frac{2 \sin(x_1)}{x_1}, & \text{falls } x_1 = x_2 \neq 0, \\ (2\pi)^{-1} \frac{4(1-\cos(x_1))}{x_1^2}, & \text{falls } x_1 \neq 0, x_2 = 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Mit dieser und mit Ergebnissen aus dem Beweis von Satz 5.14 folgt weiter für alle  $s \in \mathbb{R}$  und  $a \in S^1$  die Gleichheit

$$\begin{aligned}
 \widehat{A}_1(a, s) &= (2\pi)^{\frac{1}{2}} \widehat{\chi_{\overline{B}_1(0,1)}}(sa) \\
 &= \begin{cases} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \frac{2 \sin(sa_1)}{sa_1}, & \text{falls } a_1 = a_2, \\ (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \frac{4(1-\cos(sa_1))}{s^2 a_1^2}, & \text{falls } a_1 \neq 0, a_2 = 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Also gelten mit der Identität  $A(a, t) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{A}_1(a, s) e^{ist} ds$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  die Gleichungen

$$(5.39) \quad A_1\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), t\right) = \begin{cases} \sqrt{2}, & \text{falls } 0 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ 0, & \text{falls } \frac{1}{\sqrt{2}} < t, \end{cases}$$

$$(5.40) \quad A_1((1,0),t) = \begin{cases} 2(1-t), & \text{falls } 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & \text{falls } 1 < t. \end{cases}$$

Damit erhalten wir mit Satz 5.14 für alle  $a \in S_1^1$  und  $t \in \mathbb{R}$  die Identität

$$A_1(a,t) = \begin{cases} \frac{2}{a_1+a_2}, & \text{für } 0 \leq t \leq a_2, \\ \frac{2(a_1-t)}{a_1^2-a_2^2}, & \text{für } a_2 \leq t \leq a_1, \\ 0, & \text{für } a_1 < t. \end{cases}$$

$0 \leq t < a_2$ : Es gelten die Gleichungen

$$0 = \frac{d}{da_1} A_1(a,t) = \frac{d}{da_1} A_1\left(\left(a_1, \sqrt{1-a_1^2}\right), t\right) = \frac{2\left(a_1 - \sqrt{1-a_1^2}\right)}{\sqrt{1-a_1^2}\left(a_1 + \sqrt{1-a_1^2}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Außerdem gilt  $\left.\frac{d^2}{da_1^2}\right|_{a_1=\frac{1}{\sqrt{2}}} A_1(a,t) = 2\sqrt{2} > 0$ . Also ist der Normalenvektor  $a = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  Minimalstelle. Die Voraussetzung  $t < a_2$  ist äquivalent zu  $a_1 < \sqrt{1-t^2}$ . Weiterhin ergibt sich  $\frac{d}{da_1} A_1(a,t) > 0$  für alle  $a_1 \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{1-t^2}\right)$ . Damit ist die Abbildung  $A_1\left(\left(\cdot, \sqrt{1-(\cdot)^2}\right), t\right)$  monoton steigend auf  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{1-t^2}\right)$ . Also ist der Normalenvektor  $a = (\sqrt{1-t^2}, t)$  Maximalstelle.

$a_2 < t < a_1$ : Es gelten die Gleichungen

$$0 = \frac{d}{da_1} A_1(a,t) = \frac{d}{da_1} A_1\left(\left(a_1, \sqrt{1-a_1^2}\right), t\right) = \frac{2(4a_1t - 2a_1^2 - 1)}{(2a_1^2 - 1)^2}$$

$$\Leftrightarrow a_1 = t - \sqrt{t^2 - \frac{1}{2}} \text{ oder } a_1 = t + \sqrt{t^2 - \frac{1}{2}}.$$

Die obere Aussage ist äquivalent zu  $a_1 = t + \sqrt{t^2 - \frac{1}{2}}$ , da  $t < a_1$ . Damit  $a_1 = t + \sqrt{t^2 - \frac{1}{2}}$  existiert, muss  $\frac{1}{\sqrt{2}} < t$ . Hieraus folgt sofort  $a_2 < t$ . Aus dem Faktum, dass  $a_1 \leq 1$  ist, ergibt sich  $t \leq \frac{3}{4}$ . Weiterhin gilt  $\left.\frac{d^2}{da_1^2}\right|_{a_1=t+\sqrt{t^2-\frac{1}{2}}} A_1(a,t) = -\frac{4t^3+2t^2\sqrt{4t^2-2}-\sqrt{4t^2-2}-2t}{(2t^2+t\sqrt{4t^2-2}-1)^3} < 0$  für alle  $t \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{4}\right]$ . Also ist der Normalenvektor  $a = \left(t + \sqrt{t^2 - \frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2} - 2t\left(t - \sqrt{t^2 - \frac{1}{2}}\right)}\right)$  Maximalstelle für alle  $t \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{4}\right]$ .

Weiter gilt  $A_1\left(\left(t, \sqrt{1-t^2}\right), t\right) = 0$  für alle  $t \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{4}\right]$ . Deshalb ist der Normalenvektor  $a = (t, \sqrt{1-t^2})$  Minimalstelle für alle  $t \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{4}\right]$ .

Die Voraussetzung  $a_2 < t$  ist äquivalent zu  $\sqrt{1-t^2} < a_1$ . Weiterhin ergibt sich  $\frac{d}{da_1} A_1(a,t) < 0$

auf  $\left(\sqrt{1-t^2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  für alle  $t \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ . Damit ist  $A_1\left(\left(\cdot, \sqrt{1-(\cdot)^2}\right), t\right)$  monoton fallend auf  $\left(\sqrt{1-t^2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ . Also ist der Normalenvektor  $a = (1, 0)$  Minimalstelle und  $a = (\sqrt{1-t^2}, t)$  Maximalstelle.

Für alle  $t \in \left[\frac{3}{4}, 1\right)$  gilt weiter  $\frac{d}{da_1}A_1(a, t) > 0$  auf  $(t, 1)$ . Damit ist  $A_1\left(\left(\cdot, \sqrt{1-(\cdot)^2}\right), t\right)$  monoton steigend auf  $(t, 1)$ . Also ist der Normalenvektor  $a = (t, \sqrt{1-t^2})$  Minimalstelle und  $a = (1, 0)$  Maximalstelle.

Nicht-Differenzierbarkeit von  $A_1(a, \cdot)$  im Punkte  $t = a_2$ : Es gilt die Aussage

$$\lim_{t \nearrow a_2} \left( \frac{d}{da_1} A_1(a, t) \right) \neq \lim_{t \searrow a_2} \left( \frac{d}{da_1} A_1(a, t) \right)$$

und  $A_1\left(\left(\sqrt{1-t^2}, t\right), t\right) = \frac{2}{t+\sqrt{1-t^2}}$  für alle  $t \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ .

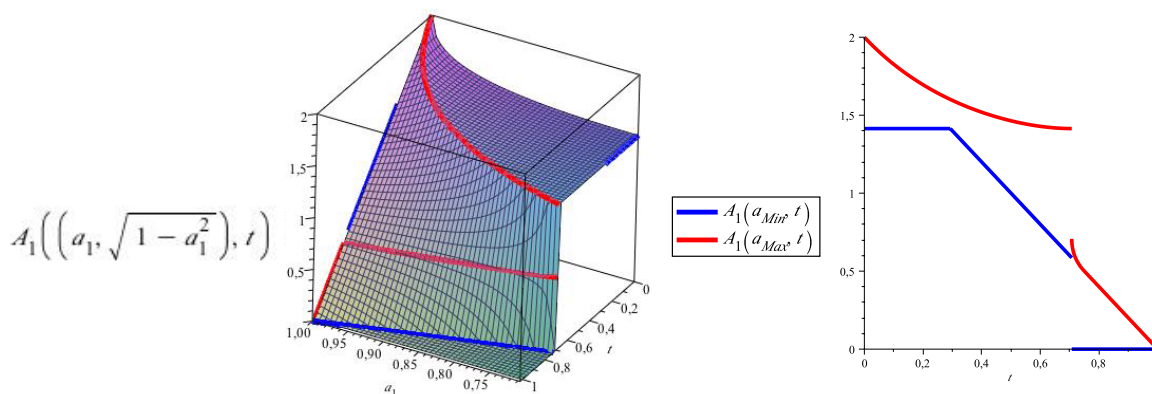


Abbildung 5.4: Verlauf der ■ Minima und ■ Maxima von  $A_1(\cdot, t)$  auf  $S_1^1$

Zum Abschluss notieren wir: Der Normalenvektor  $a = \left(a_1, \sqrt{1-a_1^2}\right)$  ist für alle  $t \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{4}\right]$  und  $a_1 \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, t\right]$  Minimalstelle. □

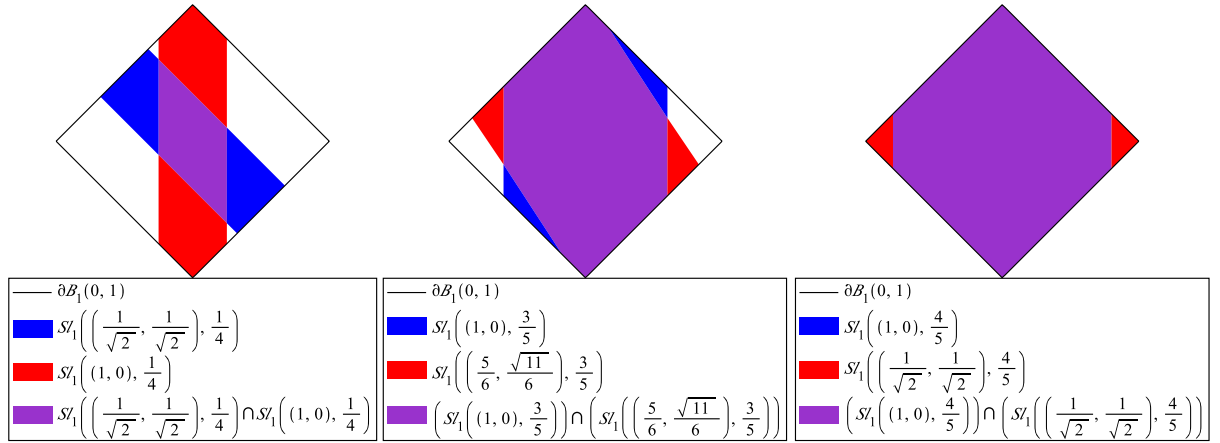
Im nächsten Satz betrachten wir die Volumenformel für Schichten  $V_{1,2}$  und berechnen mit ihr die globalen Minima und Maxima.

**Satz 5.16.** Seien  $m = 1$  und  $n = 2$ . Für alle  $a \in S_1^1 = \{a \in S^1 : 1 \geq a_1 \geq a_2 \geq 0\}$  und  $t \in \mathbb{R}_{>a_1}$  gilt  $V_{1,mn}(a, t) = 2$ . In Abhängigkeit des Parameters  $t \in [0, 1]$  erhalten wir die nachfolgenden absoluten Minima und Maxima der Funktion  $V_{1,mn}(\cdot, t)$  auf  $S_1^1$ :

Absolute Minima von $V_{1,2}(\cdot, t)$ auf $S_1^1$		
$t$	$a_{Min}$	$V_{1,2}(a_{Min}, t)$
$[0, 2 - \sqrt{2}]$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$2\sqrt{2}t$
$[2 - \sqrt{2}, 1]$	$(1, 0)$	$4t - 2t^2$



Absolute Maxima von $V_{1,2}(\cdot, t)$ auf $S_1^1$		
$t$	$a_{Max}$	$V_{1,2}(a_{Max}, t)$
$[0, \frac{1}{2}]$	$(1, 0)$	$4t - 2t^2$
$[\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$	$(\frac{1}{2t}, \frac{\sqrt{4t^2-1}}{2t})$	$1 + 2t^2$
$[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]$	$\left\{ \left( a_1, \sqrt{1 - a_1^2} \right) : a_1 \in \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}, t \right] \right\}$	2


 Abbildung 5.5: ■ Minima und ■ Maxima von  $V_{1,1}(\cdot, t)$  auf  $S_1^1$ 

**Beweis.** Zunächst berechnen wir die Funktionswerte  $V_1\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), t\right)$  und  $V_1((1, 0), t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}_{>0}$ . Es gelten mit den Gleichungen (5.38), (5.39) und (5.40) für alle  $t \in \mathbb{R}_{>0}$  die Gleichungen

$$V_1\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), t\right) = 2 \int_0^t A_1\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), s\right) ds = \begin{cases} 2\sqrt{2}t, & \text{falls } 0 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ 2, & \text{falls } \frac{1}{\sqrt{2}} < t, \end{cases}$$

$$V_1((1, 0), t) = 2 \int_0^t A_1((1, 0), s) ds = \begin{cases} 4t - 2t^2, & \text{falls } 0 \leq t \leq 1, \\ 2, & \text{falls } 1 < t. \end{cases}$$

Damit erhalten wir mit Satz 5.14 für alle  $a \in S_1^1$  und  $t \in \mathbb{R}_{>0}$  die Identität

$$V_1(a, t) = \begin{cases} \frac{4t}{a_1 + a_2}, & \text{für } 0 \leq t \leq a_2, \\ \frac{2(2a_1t - a_2^2 - t^2)}{a_1^2 - a_2^2}, & \text{für } a_2 \leq t \leq a_1, \\ 2, & \text{für } a_1 \leq t. \end{cases}$$

Differenzierbarkeit von  $V_1(a, \cdot)$  im Punkte  $t = a_2$ : Es gilt die Identität

$$\lim_{t \nearrow a_2} \left( \frac{d}{da_1} V_1(a, t) \right) = \frac{4(a_1 - a_2)}{(a_1^2 + a_2^2)^2} = \lim_{t \searrow a_2} \left( \frac{d}{da_1} V_1(a, t) \right).$$

$0 < t \leq a_2$ : Es gelten die Gleichungen

$$0 = \frac{d}{da_1} V_1(a, t) = \frac{d}{da_1} V_1 \left( (a_1, \sqrt{1 - a_1^2}), t \right) = \frac{4t (a_1 - \sqrt{1 - a_1^2})}{\sqrt{1 - a_1^2} (a_1 + \sqrt{1 - a_1^2})^2}$$

$$\Leftrightarrow a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Außerdem gilt  $\frac{d^2}{da_1^2} \Big|_{a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}} V_1(a, t) = 4\sqrt{2}t > 0$ . Also ist der Normalenvektor  $a = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$

Minimalstelle. Die Voraussetzung  $t \leq a_2$  ist äquivalent zu  $a_1 \leq \sqrt{1 - t^2}$ . Weiterhin ergibt sich  $\frac{d}{da_1} V_1(a, t) > 0$  für alle  $a_1 \in \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{1 - t^2} \right]$ . Damit ist die Abbildung  $V_1 \left( \left( \cdot, \sqrt{1 - (\cdot)^2} \right), t \right)$  auf  $\left[ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{1 - t^2} \right]$  streng monoton steigend. Also ist der Normalenvektor  $a = (\sqrt{1 - t^2}, t)$  Maximalstelle.

$a_2 \leq t \leq a_1$ : Es gelten die Gleichungen

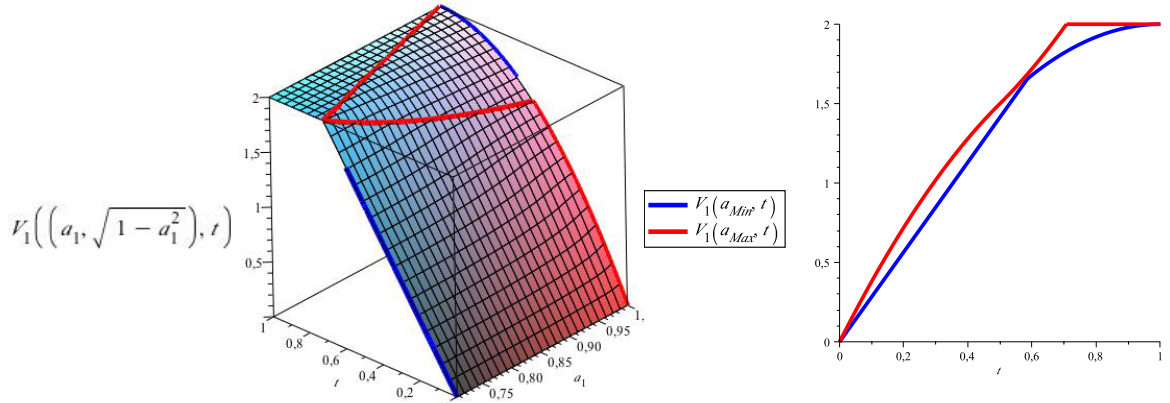
$$0 = \frac{d}{da_1} V_1(a, t) = \frac{d}{da_1} V_1 \left( (a_1, \sqrt{1 - a_1^2}), t \right) = \frac{4(a_1 + 2a_1t^2 - 2a_1^2t - t)}{(2a_1^2 - 1)^2}$$

$$\Leftrightarrow a_1 = t \text{ oder } a_1 = \frac{1}{2t}.$$

Für  $a = (t, \sqrt{1 - t^2})$  ist  $t \in \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right]$  und wir erhalten  $V_1 \left( (t, \sqrt{1 - t^2}), t \right) = 2$ . Also ist der Normalenvektor  $a = (t, \sqrt{1 - t^2})$  Maximalstelle für alle  $t \in \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right]$ . Das Minimum wird daher am Rand angenommen, d. h. senkrecht zu  $a = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$  oder  $a = (1, 0)$ .

Für  $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq a_1 = \frac{1}{2t} \leq 1$  erhalten wir  $\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  und  $a_2 \leq t$ . Weiterhin gilt  $\frac{d^2}{da_1^2} \Big|_{a_1 = \frac{1}{2t}} V_1(a, t) = \frac{16t^4}{2t^2 - 1} < 0$  für alle  $t \in \left[ \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$ . Demzufolge ist der Normalenvektor  $a = \left( \frac{1}{2t}, \frac{\sqrt{4t^2 - 1}}{2t} \right)$  Maximalstelle für alle  $t \in \left[ \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$ . Auch hier wird das Minimum am Rand angenommen, d. h. senkrecht zu  $a = (\sqrt{1 - t^2}, t)$  oder  $a = (1, 0)$ .

Weiter ist  $\frac{d}{da_1} V_1(a, t) > 0$  auf  $[\sqrt{1 - t^2}, 1]$  für alle  $t \in (0, \frac{1}{2})$ . Damit ist  $V_1 \left( \left( \cdot, \sqrt{1 - (\cdot)^2} \right), t \right)$


 Abbildung 5.6: Verlauf der ■ Minima und ■ Maxima von  $V_1(\cdot, t)$  auf  $S_1^1$ 

streng monoton steigend auf  $[\sqrt{1-t^2}, 1]$ . Also ist der Normalenvektor  $a = (\sqrt{1-t^2}, t)$  Minimalstelle und  $a = (1, 0)$  Maximalstelle.

Zum Abschluss notieren wir, dass  $a = (a_1, \sqrt{1-a_1^2})$  Maximalstelle für alle  $a_1 \in [\frac{1}{\sqrt{2}}, t]$  und  $t \in [\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]$  ist.  $\square$

Der nächste Satz beschäftigt sich wieder mit Schnitten, diesmal aber im 3-dimensionalen. Wir stellen die globalen Minima und Maxima der Funktion  $A_{1,2}(\cdot, t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  auf.

**Satz 5.17.** Seien  $m = 1$  und  $n = 3$ . Für alle  $a \in S_1^1 = \{a \in S^1 : 1 \geq a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq 0\}$  und  $t \in \mathbb{R}_{>a_1}$  gilt  $A_{1,m(n-1)}(a, t) = 0$ . In Abhängigkeit des Parameters  $t \in [0, 1]$  erhalten wir die nachfolgenden absoluten Minima und Maxima der Funktion  $A_{1,m(n-1)}(\cdot, t)$  auf  $S_1^1$ :

Absolute Minima von $A_{1,2}(\cdot, t)$ auf $S_1^1$		
$t$	$a_{Min}$	$A_{1,2}(a_{Min}, t)$
$\left[0, \frac{91-48\sqrt{3}}{37}\right]$	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}(1-t^2)$
$\left[\frac{91-48\sqrt{3}}{37}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$	$(1, 0, 0)$	$2(1-t)^2$
$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right]$	$\{(a_1, a_2, a_3) : a_1 \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, t\right]\}$	0

Absolute Maxima von $A_{1,2}(\cdot, t)$ auf $S_1^1$		
$t$	$a_{Max}$	$A_{1,2}(a_{Max}, t)$
$\left[0, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$	$(\sqrt{1-2t^2}, t, t)$	$\frac{2\sqrt{1-2t^2}(1-t^2)-4t(1-2t^2)}{(1-3t^2)^2}$

$\left[\frac{1}{\sqrt{6}}, 0.4488619\right]$	$(\sqrt{1-2(b_6(t))^2}, b_6(t), b_6(t))^{(1)}$	$\frac{2\sqrt{1-2(b_6(t))^2}b_6(t)+(b_6(t))^2-t^2}{b_6(t)(\sqrt{1-2(b_6(t))^2}+b_6(t))^2}^{(1)}$
$\left[0.4488619, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}(1-t^2)$
$\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{8+\sqrt{11}}{15\sqrt{2}}\right]$	$(\sqrt{1-2(b_{10}(t))^2}, b_{10}(t), b_{10}(t))^{(2)}$	$\frac{(b_{10}(t)-t)(t(1-(b_{10}(t))^2)+b_{10}(t)(7(b_{10}(t))^2-3))}{b_{10}(t)(1-3(b_{10}(t))^2)^2}^{(2)}$
$\left[\frac{8+\sqrt{11}}{15\sqrt{2}}, \sqrt{2}-1+\sqrt{5-\frac{7}{\sqrt{2}}}\right]$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$	$\sqrt{2}(1-2t^2)$
$\left[\sqrt{2}-1+\sqrt{5-\frac{7}{\sqrt{2}}}, 1\right]$	$(1, 0, 0)$	$2(1-t)^2$

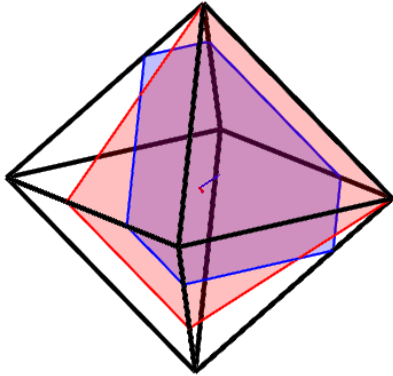
$$(1) \quad b_6(t) := \frac{1}{6} \left( 6 + 8t^2 + \varphi_6(t) - \frac{324\psi_6(t)}{\varphi_6(t)} - 18\sqrt{3}i \left( \frac{\varphi_6(t)}{18} + \frac{18\psi_6(t)}{\varphi_6(t)} \right) \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\text{wobei } \varphi_6(t) := \left( 54t^2 + 396t^4 + 584t^6 - 27 - 72\sqrt{216t^{12} + 148t^{10} + 6t^8 - 9t^6} \right)^{\frac{1}{3}}$$

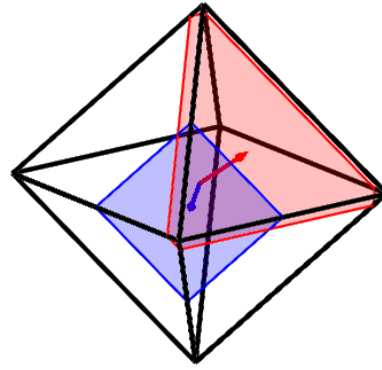
$$\text{und } \psi_6(t) := \frac{1}{27}t^2 + \frac{23}{81}t^4 - \frac{1}{36}.$$

$$(2) \quad b_{10}(t) := t_1^{-1}(t),$$

$$\text{wobei } t_1(b) := \frac{(8b^2(2-3b^2) - (3b^2-1)\sqrt{43b^4-18b^2+3})b}{14b^2-9b^4-1}.$$



$$S_1\left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \frac{1}{5}\right) \text{ und } S_1\left(\left(\frac{\sqrt{23}}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right), \frac{1}{5}\right)$$

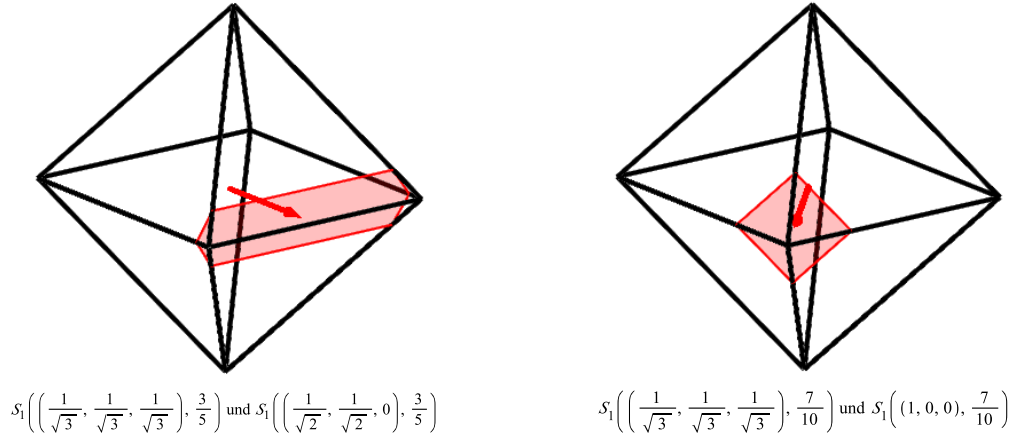


$$S_1\left((1, 0, 0), \frac{1}{2}\right) \text{ und } S_1\left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \frac{1}{2}\right)$$

Abbildung 5.7: ■ Minima und ■ Maxima von  $A_1(\cdot, t)$  auf  $S_1^1$

**Beweis.** Zunächst berechnen wir die Funktionswerte  $A_1((a_1, a_2, a_2), t)$ ,  $A_1\left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), t\right)$ ,  $A_1((a_1, a_1, a_3), t)$ ,  $A_1((a_1, a_2, 0), t)$ ,  $A_1\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), t\right)$  und  $A_1((1, 0, 0), t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Es gilt für alle  $x \in \mathbb{R}^3$  die Gleichung

$$\begin{aligned} & \widehat{\chi_{\overline{B}_1(0,1)}}(x) \\ &= (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} \chi_{\overline{B}_1(0,1)}(y) e^{-i\langle x, y \rangle} dy \\ &= (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,1]}(|y_1|) e^{-ix_1 y_1} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,1-|y_1|]}(|y_2|) e^{-ix_2 y_2} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,1-|y_1|-|y_2|]}(|y_3|) e^{-ix_3 y_3} dy_3 dy_2 dy_1 \end{aligned}$$


 Abbildung 5.8: ■ Minima und ■ Maxima von  $A_1(\cdot, t)$  auf  $S_1^1$ 

$$\begin{aligned}
 &= (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int_{-1}^1 e^{-ix_1 y_1} \int_{-1+|y_1|}^{1-|y_1|} e^{-ix_2 y_2} \int_{-1+|y_1|+|y_2|}^{1-|y_1|-|y_2|} e^{-ix_3 y_3} dy_3 dy_2 dy_1 \\
 &= \begin{cases} (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \frac{4((x_1^2+x_2^2)\sin(x_2)-2x_1x_2\sin(x_1)+(x_1^2x_2-x_2^3)\cos(x_2))}{(x_1^2-x_2^2)^2x_2}, & \text{falls } x_1 \neq 0, x_2 = x_3 \neq 0, \\ (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \frac{(1+x_1^2)\sin(x_1)-x_1\cos(x_1)}{x_1^3}, & \text{falls } x_1 = x_2 = x_3 \neq 0, \\ (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \frac{4((x_1^2+x_3^2)\sin(x_1)-2x_1x_3\sin(x_3)+(x_1^2x_3-x_3^3)\cos(x_1))}{x_1(x_1^2-x_3^2)^2}, & \text{falls } x_1 = x_2 \neq 0, x_3 \neq 0, \\ (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \frac{8(x_1\sin(x_2)-x_2\sin(x_1))}{x_1x_2(x_1^2-x_2^2)}, & \text{falls } x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, x_3 = 0, \\ (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \frac{4(\sin(x_1)-x_1\cos(x_1))}{x_1^3}, & \text{falls } x_1 = x_2 \neq 0, x_3 = 0, \\ (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \frac{8(x_1-\sin(x_1))}{x_1^3}, & \text{falls } x_1 \neq 0, x_2 = x_3 = 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Damit und mit Ergebnissen aus dem Beweis von Satz 5.14 ergibt sich für alle  $s \in \mathbb{R}$  und  $a \in S^1$

$$\begin{aligned}
 \widehat{A}_1(a, s) &= 2\pi \widehat{\chi_{\overline{B}_1(0,1)}}(sa) \\
 &= \begin{cases} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \frac{4((a_1^2+a_2^2)\sin(sa_2)-2a_1a_2\sin(sa_1)+s(a_1^2a_2-a_2^3)\cos(sa_2))}{s^3(a_1^2-a_2^2)^2a_2}, & \text{falls } a_1 \neq 0, a_2 = a_3 \neq 0, \\ (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \frac{(1+s^2a_1^2)\sin(sa_1)-sa_1\cos(sa_1)}{s^3a_1^3}, & \text{falls } a_1 = a_2 = a_3 \neq 0, \\ (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \frac{4((a_1^2+a_3^2)\sin(sa_1)-2a_1a_3\sin(sa_3)+s(a_1^2a_3-a_3^3)\cos(sa_1))}{s^3a_1(a_1^2-a_3^2)^2}, & \text{falls } a_1 = a_2 \neq 0, a_3 \neq 0, \\ (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \frac{8(a_1\sin(sa_2)-a_2\sin(sa_1))}{s^3a_1a_2(a_1^2-a_2^2)}, & \text{falls } a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, a_3 = 0, \\ (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \frac{4(\sin(sa_1)-sa_1\cos(sa_1))}{s^3a_1^3}, & \text{falls } a_1 = a_2 \neq 0, a_3 = 0, \\ (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \frac{8(sa_1-\sin(sa_1))}{s^3a_1^3}, & \text{falls } a_1 \neq 0, a_2 = a_3 = 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Also gelten mit der Identität  $A(a, t) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{A}_1(a, s) e^{ist} ds$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  die Gleichungen

$$(5.41) \quad A_1((a_1, a_2, a_2), t) = \begin{cases} \frac{2a_1a_2+a_2^2-t^2}{a_2(a_1+a_2)^2}, & \text{falls } 0 \leq t \leq a_2, \\ \frac{2a_1(a_1-t)^2}{(a_1^2-a_2^2)^2}, & \text{falls } a_2 \leq t \leq a_1, \\ 0, & \text{falls } a_1 \leq t, \end{cases}$$

$$(5.42) \quad A_1\left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), t\right) = \begin{cases} \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-t^2), & \text{falls } 0 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ 0, & \text{falls } \frac{1}{\sqrt{3}} < t, \end{cases}$$

$$(5.43) \quad A_1((a_1, a_1, a_3), t) = \begin{cases} \frac{2a_1a_3+a_1^2-t^2}{a_1(a_1+a_3)^2}, & \text{falls } 0 \leq t \leq a_3, \\ \frac{a_1^4-3a_1^2a_3^2+4a_1a_3^2t-(a_1^2+a_3^2)t^2}{a_1(a_1^2-a_3^2)^2}, & \text{falls } a_3 \leq t \leq a_1, \\ 0, & \text{falls } a_1 \leq t, \end{cases}$$

$$(5.44) \quad A_1((a_1, a_2, 0), t) = \begin{cases} \frac{2(a_1a_2-t^2)}{a_1a_2(a_1+a_2)}, & \text{falls } 0 \leq t \leq a_2, \\ \frac{2(a_1-t)^2}{a_1(a_1^2-a_2^2)}, & \text{falls } a_2 \leq t \leq a_1, \\ 0, & \text{falls } a_1 \leq t, \end{cases}$$

$$(5.45) \quad A_1\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), t\right) = \begin{cases} \sqrt{2}(1-2t^2), & \text{falls } 0 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ 0, & \text{falls } \frac{1}{\sqrt{2}} < t, \end{cases}$$

$$(5.46) \quad A_1((1, 0, 0), t) = \begin{cases} 2(1-t)^2, & \text{falls } 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & \text{falls } 1 < t. \end{cases}$$

Insgesamt erhalten wir mit Satz 5.14 für alle  $a \in S_1^1$  und  $t \in \mathbb{R}$  die Identität

$$A_1(a, t) = \begin{cases} \frac{2(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3-t^2)}{(a_1+a_2)(a_1+a_3)(a_2+a_3)}, & \text{für } 0 \leq t \leq a_3, \\ \frac{2(a_1^2a_2^2-a_1^2a_3^2-a_2^2a_3^2-a_1a_2a_3^2+2a_3^2(a_1+a_2)t-(a_1a_2+a_3^2)t^2)}{(a_1+a_2)(a_1^2-a_3^2)(a_2^2-a_3^2)}, & \text{für } a_3 \leq t \leq a_2, \\ \frac{2a_1(a_1-t)^2}{(a_1^2-a_2^2)(a_1^2-a_3^2)}, & \text{für } a_2 \leq t \leq a_1, \\ 0, & \text{für } a_1 < t. \end{cases}$$

Wenn wir die Lagrange-Methode anwenden, reicht es die Gleichung

$$(5.47) \quad \nabla A_1((a_1, a_2, a_3), t) = \lambda(a_1, a_2, a_3)$$

für alle  $t \in [0, 1]$  nach  $(a_1, a_2, a_3)$  und  $\lambda$  zu lösen.

$0 \leq t \leq a_3$ : Im Folgenden werden wir für diesen Fall, der beispielhaft für alle Fälle stehen soll, alle Lösungen der Gleichung (5.47) angeben. Die Lösungen der Gleichung (5.47) sind

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, a_3, \lambda) &= \left( a_3, a_3, a_3, \frac{t^2 - a_3^2}{4a_3^5} \right), \\ (a_1, a_2, a_3, \lambda) &= \left( a_2, a_2, \frac{4a_2t^2}{3a_2^2 - t^2}, -\frac{1}{54} \frac{(3a_2^2 - t^2)^3}{a_2^5(a_2^2 + t^2)^2} \right), \\ (a_1, a_2, a_3, \lambda) &= \left( \frac{4a_2t^2}{3a_2^2 - t^2}, a_2, a_2, -\frac{1}{54} \frac{(3a_2^2 - t^2)^3}{a_2^5(a_2^2 + t^2)^2} \right), \\ (a_1, a_2, a_3, \lambda) &= \left( a_1, \frac{4a_1t^2}{3a_1^2 - t^2}, a_1, -\frac{1}{54} \frac{(3a_1^2 - t^2)^3}{a_1^5(a_1^2 + t^2)^2} \right) \text{ und} \\ (a_1, a_2, a_3, \lambda) &= \left( -\frac{a_3}{2} \pm i \frac{\sqrt{3a_3^2 + 4t^2}}{2}, \frac{a_3^3 - \left( \frac{a_3}{2} \mp i \frac{\sqrt{3a_3^2 + 4t^2}}{2} \right) t^2 + 2a_3t^2}{\left( -\frac{a_3}{2} \pm i \frac{\sqrt{3a_3^2 + 4t^2}}{2} \right) a_3 - t^2}, a_3, \frac{2}{a_3(t^2 + a_3^2)} \right). \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir unter Berücksichtigung unserer Voraussetzungen notwendige Bedingungen für die Extremstellen der Funktion  $A_1(\cdot, t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Die Tripel  $(a_1, a_2, a_3)$ , die die Gleichung (5.47) lösen, haben die Gestalt

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, a_3) &= (b, b, \sqrt{1 - 2b^2}) \\ \text{oder} \quad (a_1, a_2, a_3) &= (\sqrt{1 - 2b^2}, b, b). \end{aligned}$$

Deshalb beschränken wir die Suche auf diese Art von Tripeln. Zunächst ist noch das Tripel  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$  als eine Lösung der Gleichung (5.47) anzugeben.

$a_3 \leq t \leq a_2$ : Auch für diesen Fall ergibt sich aus der Gleichung (5.47) eine notwendige Bedingung für die Extremstellen der Funktion  $A_1(\cdot, t)$ . Die Tripel  $(a_1, a_2, a_3)$ , die die Gleichung (5.47) lösen, haben die Gestalt

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, a_3) &= (\sqrt{1 - b^2}, b, 0) \\ \text{oder} \quad (a_1, a_2, a_3) &= (b, \sqrt{1 - b^2}, 0) \\ \text{oder} \quad (a_1, a_2, a_3) &= (b, b, \sqrt{1 - 2b^2}). \end{aligned}$$

$a_2 \leq t \leq a_1$ : Für die Maximalstellen der Funktion  $A_1(\cdot, t)$  betrachten wir die Ungleichung

$$(5.48) \quad \frac{2a_1(a_1 - t)^2}{(a_1^2 - a_2^2)(a_1^2 - a_3^2)} \leq \frac{2a_1(a_1 - t)^2}{(a_1^2 - a_2^2)^2}$$

$$(5.49) \quad \leq \frac{2a_1}{(a_1 + a_2)^2}.$$

Nach Ungleichung (5.49) wird für  $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq t$  das Maximum der Funktion  $A_1(\cdot, t)$  in den Punkten der Gestalt  $(a_1, a_2, a_3) = \left(t, \sqrt{\frac{1-t^2}{2}}, \sqrt{\frac{1-t^2}{2}}\right)$  angenommen. Nach Ungleichung (5.48) wird das Maximum für  $0 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$  in den Punkten der Gestalt  $(a_1, a_2, a_3) = (\sqrt{1-2b^2}, b, b)$  angenommen. Für die Minimalstellen der Funktion  $A_1(\cdot, t)$  betrachten wir die Ungleichung

$$(5.50) \quad \frac{2a_1(a_1 - t)^2}{(a_1^2 - a_2^2)(a_1^2 - a_3^2)} \geq \frac{2a_1(a_1 - t)^2}{(a_1^2 - a_3^2)^2} \geq 0.$$

Im Falle  $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq t = a_1$  gilt die Gleichheit  $A_1((a_1, a_2, a_3), t) = 0$ . Für  $0 \leq t < \frac{1}{\sqrt{3}}$  wird das Minimum nach Ungleichung (5.50) in den Punkten der Gestalt  $(a_1, a_2, a_3) = (\sqrt{1-2b^2}, b, b)$  angenommen.

Nun betrachten wir die Funktion  $A_1(\cdot, t)$  in den relevanten Punkten. Mit Identität (5.44) erhalten wir für alle  $0 \leq b \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  die Gleichung

$$A_1\left((\sqrt{1-b^2}, b, 0), t\right) = \begin{cases} \frac{2(\sqrt{1-b^2}b-t^2)}{\sqrt{1-b^2}b(\sqrt{1-b^2}+b)}, & \text{falls } 0 \leq t \leq b, \\ \frac{2(\sqrt{1-b^2}-t)^2}{\sqrt{1-b^2}(1-2b^2)}, & \text{falls } b \leq t \leq \sqrt{1-b^2}, \\ 0, & \text{falls } \sqrt{1-b^2} \leq t. \end{cases}$$

$0 \leq t \leq b$ : Es gilt unter unseren Voraussetzungen die Äquivalenz

$$\begin{aligned} & \frac{d}{db} \left( \frac{2(\sqrt{1-b^2}b-t^2)}{\sqrt{1-b^2}b(\sqrt{1-b^2}+b)} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & b = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ oder } b = \frac{1}{2} \sqrt{2 - 2\sqrt{1-4t^2} - 18t^4 - 6\sqrt{4t^6+9t^8}} =: b_1 \text{ für } 0 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{10}}. \end{aligned}$$

Für  $0 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{10}}$  ist  $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$  und für  $\frac{1}{\sqrt{10}} \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  ist  $b = t$  die Minimalstelle. Für  $0 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{10}}$  ist  $b = b_1$  und für  $\frac{1}{\sqrt{10}} \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  ist  $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$  die Maximalstelle.

$b \leq t \leq \sqrt{1-b^2}$ : Es gilt unter unseren Voraussetzungen die Äquivalenz

$$\begin{aligned} & \frac{d}{db} \left( \frac{2(\sqrt{1-b^2}-t)^2}{\sqrt{1-b^2}(1-2b^2)} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & b = 0 \\ & \text{oder } b = \sqrt{1-t^2} \text{ für } \frac{1}{\sqrt{2}} \leq t \leq 1 \\ & \text{oder } b = \frac{1}{6} \left( 3\varphi_2(t) + \frac{108\psi_2(t)}{\varphi_2(t)} + 48 - 108t^2 + 18\sqrt{3}i \left( \frac{1}{6}\varphi_2(t) - \frac{6\psi_2(t)}{\varphi_2(t)} \right) \right)^{\frac{1}{2}} =: b_2 \\ & \text{für } \frac{1}{6}\sqrt{6+4\sqrt{3}} \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

wobei  $\varphi_2(t) := (1 + 270t^2 - 2916t^4 + 5832t^6 - 12\sqrt{6t^2 + 216t^4 - 648t^6})^{\frac{1}{3}}$  und  $\psi_2(t) := \frac{1}{36} - 3t^2 + 9t^4$ .



Für  $0 \leq t \leq \frac{1}{6}\sqrt{6+4\sqrt{3}}$  ist  $b = 0$ , für  $\frac{1}{6}\sqrt{6+4\sqrt{3}} \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  ist  $b = b_2$  und für  $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq t \leq 1$  ist  $b = \sqrt{1-t^2}$  die Minimalstelle.

Für  $0 \leq t \leq 0.6265637388$  ist  $b = t$  und für  $0.6265637388 \leq t \leq 1$  ist  $b = 0$  die Maximalstelle.

Weiter erhalten wir mit der Identität (5.44) für alle  $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq b \leq 1$  die Gleichung

$$A_1\left((b, \sqrt{1-b^2}, 0), t\right) = \begin{cases} \frac{2(b\sqrt{1-b^2}-t^2)}{b\sqrt{1-b^2}(b+\sqrt{1-b^2})}, & \text{falls } 0 \leq t \leq \sqrt{1-b^2}, \\ \frac{2(b-t)^2}{b(2b^2-1)}, & \text{falls } \sqrt{1-b^2} \leq t \leq b, \\ 0, & \text{falls } b \leq t. \end{cases}$$

$0 \leq t \leq \sqrt{1-b^2}$ : Es gilt unter unseren Voraussetzungen die Äquivalenz

$$\begin{aligned} \frac{d}{db} \left( \frac{2(b\sqrt{1-b^2}-t^2)}{b\sqrt{1-b^2}(b+\sqrt{1-b^2})} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow b = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ oder } b = \frac{1}{2} \sqrt{2 + 2\sqrt{1-4t^2-18t^4-6\sqrt{4t^6+9t^8}}} &=: b_3 \text{ für } 0 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{10}}. \end{aligned}$$

Für  $0 \leq t \leq 0.2337224759$  ist  $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$  und für  $0.2337224759 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  ist  $b = \sqrt{1-t^2}$  die Minimalstelle. Für  $0 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{10}}$  ist  $b = b_3$  und für  $\frac{1}{\sqrt{10}} \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  ist  $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$  die Maximalstelle.

$\sqrt{1-b^2} \leq t \leq b$ : Es gilt unter unseren Voraussetzungen die Äquivalenz

$$\begin{aligned} \frac{d}{db} \left( \frac{2(b-t)^2}{b(2b^2-1)} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow b = t \text{ für } \frac{1}{\sqrt{2}} \leq t \leq 1 \\ \text{oder } b = \frac{1}{12} \left( \varphi_4(t) + \frac{\psi_4(t)}{\varphi_4(t)} - t - \frac{\sqrt{3}}{2} i \left( \frac{\varphi_4(t)}{6} + \frac{2\psi_4(t)}{\varphi_4(t)} \right) \right) &=: b_4 \\ \text{für } \frac{1}{6}\sqrt{6+4\sqrt{3}} \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

wobei  $\varphi_4(t) := (108t - 216t^3 - 6\sqrt{6+216t^2-648t^4})^{\frac{1}{3}}$  und  $\psi_4(t) := \frac{1}{2} - 3t^2$ .

Für  $0 \leq t \leq \frac{1}{6}\sqrt{6+4\sqrt{3}}$  ist  $b = 1$ , für  $\frac{1}{6}\sqrt{6+4\sqrt{3}} \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  ist  $b = b_4$  und für  $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq t \leq 1$  ist  $b = t$  die Minimalstelle. Für  $0 \leq t \leq 0.6265637388$  ist  $b = \sqrt{1-t^2}$  und für  $0.6265637388 \leq t \leq 1$  ist  $b = 1$  die Maximalstelle.

Weiter erhalten wir mit Identität (5.44) für alle  $0 \leq b \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$  die Gleichheit

$$A_1\left((\sqrt{1-2b^2}, b, b), t\right) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{1-2b^2}b+b^2-t^2}{b(\sqrt{1-2b^2}+b)^2}, & \text{falls } 0 \leq t \leq b, \\ \frac{2\sqrt{1-2b^2}(\sqrt{1-2b^2}-t)^2}{(1-3b^2)^2}, & \text{falls } b \leq t \leq \sqrt{1-2b^2}, \\ 0, & \text{falls } \sqrt{1-2b^2} \leq t. \end{cases}$$

$0 \leq t \leq b$ : Es gilt unter unseren Voraussetzungen die Äquivalenz

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{db} \left( \frac{2\sqrt{1-2b^2}b + b^2 - t^2}{b(\sqrt{1-2b^2} + b)^2} \right) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \quad b = \frac{1}{\sqrt{3}} \\
 \text{oder } b &= \frac{1}{6} \left( 6 + 8t^2 - 2\varphi_5(t) + \frac{648\psi_5(t)}{\varphi_5(t)} \right)^{\frac{1}{2}} =: b_5 \\
 & \text{für } 0.4472135954 \leq t \leq \frac{\sqrt{2}}{18} \frac{\sqrt{c_5(c_5^2 + 1126 - 37c_5)}}{c_5} \\
 \text{oder } b &= \frac{1}{6} \left( 6 + 8t^2 + \varphi_6(t) - \frac{324\psi_6(t)}{\varphi_6(t)} - 18\sqrt{3}i \left( \frac{\varphi_6(t)}{18} + \frac{18\psi_6(t)}{\varphi_6(t)} \right) \right)^{\frac{1}{2}} =: b_6 \\
 & \text{für } \frac{1}{\sqrt{6}} \leq t \leq \frac{\sqrt{2}}{18} \frac{\sqrt{c_6(c_6^2 + 1126 - 37c_6)}}{c_6},
 \end{aligned}$$

wobei  $\varphi_k(t) := (54t^2 + 396t^4 + 584t^6 - 27 - 72\sqrt{216t^{12} + 148t^{10} + 6t^8 - 9t^6})^{\frac{1}{3}}$ ,

$\psi_k(t) := \frac{1}{27}t^2 + \frac{23}{81}t^4 - \frac{1}{36}$  und  $c_k := (51407 + 4617\sqrt{57})^{\frac{1}{3}}$  für alle  $k \in \{5, 6\}$ .

Für  $0 \leq t \leq 0.4367855608$  ist  $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$  und für  $0.4367855608 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$  ist  $b = t$  die Mini-

malstelle. Für  $0 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{6}}$  ist  $b = t$ , für  $\frac{1}{\sqrt{6}} \leq t \leq \frac{\sqrt{2}}{18} \frac{\sqrt{c_6(c_6^2 + 1126 - 37c_6)}}{c_6}$  ist  $b = b_6$  und für

$\frac{\sqrt{2}}{18} \frac{\sqrt{c_6(c_6^2 + 1126 - 37c_6)}}{c_6} \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$  ist  $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$  die Maximalstelle.

$b \leq t \leq \sqrt{1-2b^2}$ : Es gilt unter unseren Voraussetzungen die Äquivalenz

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{db} \left( \frac{2\sqrt{1-2b^2}(\sqrt{1-2b^2} - t)^2}{(1-3b^2)^2} \right) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \quad b = 0 \\
 \text{oder } b &= \sqrt{\frac{1-t^2}{2}} \text{ für } \frac{1}{\sqrt{3}} \leq t \leq 1 \\
 \text{oder } b &= b_7 \text{ für } \frac{1}{\sqrt{3}} \leq t \leq \frac{3}{5},
 \end{aligned}$$

wobei  $b_7 := \frac{(2(\varphi_7(t))^2(15(\varphi_7(t))^2 - (\varphi_7(t))^4 - 27t^2(\varphi_7(t))^2 + 18t\varphi_7(t) - 54t^3\varphi_7(t) - 9 + 18\sqrt{3}t + 108t^2 - 54\sqrt{3}t^3 - 243t^4))^{\frac{1}{2}}}{6(\varphi_7(t))^2}$

und  $\varphi_7(t) := (27t^3 + 9\sqrt{3}t^2 - 9t - 3\sqrt{3})^{\frac{1}{3}}$ .

Für  $0 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$  ist  $b = 0$  und für  $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq t \leq 1$  ist  $b = \sqrt{\frac{1-t^2}{2}}$  die Minimalstelle. Für  $0 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$  ist  $b = t$ , für  $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq t \leq \frac{3}{5}$  ist  $b = b_7$  und für  $\frac{3}{5} \leq t \leq 1$  ist  $b = 0$  die Maximalstelle.

Weiter erhalten wir mit Identität (5.44) für alle  $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq b \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  die Gleichheit

$$A_1\left(\left(b, b, \sqrt{1-b^2}\right), t\right) = \begin{cases} \frac{2b\sqrt{1-2b^2+b^2-t^2}}{b(b+\sqrt{1-2b^2})^2}, & \text{falls } 0 \leq t \leq \sqrt{1-2b^2}, \\ \frac{(b-t)(t(1-b^2)+b(7b^2-3))}{b(1-3b^2)^2}, & \text{falls } \sqrt{1-2b^2} \leq t \leq b, \\ 0, & \text{falls } b \leq t. \end{cases}$$

$0 \leq t \leq \sqrt{1-2b^2}$ : Es gilt unter unseren Voraussetzungen die Äquivalenz

$$\begin{aligned} \frac{d}{db} \left( \frac{2b\sqrt{1-2b^2+b^2-t^2}}{b(b+\sqrt{1-2b^2})^2} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad b &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \text{oder } b &= \frac{1}{6} \left( 6 + 8t^2 - 2\varphi_8(t) + \frac{648\psi_6(t)}{\varphi_6(t)} \right)^{\frac{1}{2}} =: b_8 \\ &\text{für } 0.4153626508 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{5}}, \end{aligned}$$

wobei  $\varphi_8(t) := \varphi_6(t)$  und  $\psi_8(t) := \psi_6(t)$ .

Für  $0 \leq t \leq 0.4153626508$  ist  $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , für  $0.4153626508 \leq t \leq 0.4320176993$  ist  $b = \sqrt{\frac{1-t^2}{2}}$ , für  $0.4320176993 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$  ist  $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$  und für  $\frac{1}{\sqrt{5}} \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  ist  $b = \sqrt{\frac{1-t^2}{2}}$  die Minimalstelle. Für  $0 \leq t \leq 0.4153626508$  ist  $b = \sqrt{\frac{1-t^2}{2}}$ ,  $0.4153626508 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$  ist  $b = b_8$  und für  $\frac{1}{\sqrt{5}} \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  ist  $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$  die Maximalstelle.

$\sqrt{1-2b^2} \leq t \leq b$ : Es gilt unter unseren Voraussetzungen die Äquivalenz

$$\begin{aligned} \frac{d}{db} \left( \frac{(b-t)(t(1-b^2)+b(7b^2-3))}{b(1-3b^2)^2} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad t &= \frac{(8b^2(2-3b^2) - (3b^2-1)\sqrt{43b^4-18b^2+3})b}{14b^2-9b^4-1} =: t_1(b) \\ \text{oder } t &= \frac{(8b^2(2-3b^2) + (3b^2-1)\sqrt{43b^4-18b^2+3})b}{14b^2-9b^4-1} =: t_2(b). \end{aligned}$$

Es ist  $t_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{30}(8-\sqrt{19})$  und  $t_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Mit der Taylorapproximation

$$t_1(b) = \frac{1}{\sqrt{3}} - 2\left(b - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - 3\sqrt{3}\left(b - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{225}{8}\left(b - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \mathcal{O}\left(\left(b - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4\right)$$

von  $t_1$  im Punkte  $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$  erhalten wir eine Näherung der Extremstelle

$$b_9 := t_1^{-1}(t) \approx \frac{67\sqrt{3}}{225} + \frac{\varphi_9(t)}{225} - \frac{112}{25\varphi_9(t)},$$

wobei  $\varphi_9(t) := \left(80364\sqrt{3} - 202500t + 300\sqrt{226659 - 361638\sqrt{3}t + 455625t^2}\right)^{\frac{1}{3}}$ .

Weiter ist  $t_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{8+\sqrt{19}}{15\sqrt{2}}$  und  $t_2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Mit der Taylorapproximation

$$t_2(b) = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{33}{8} \left(b - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \mathcal{O}\left(\left(b - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4\right)$$

von  $t_2$  im Punkte  $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$  erhalten wir eine Näherung der Extremstelle

$$b_{10} := t_1^{-1}(t) \approx \frac{1}{\sqrt{3}} + \left(\frac{8}{33} \left(t - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Insgesamt erhalten wir für diesen Fall die folgenden Minimal- und Maximalstellen:

Für  $0 \leq t \leq 0.2101793265$  ist  $b = \sqrt{\frac{1-t^2}{2}}$ , für  $0.2101793265 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$  ist  $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$  und für  $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  ist  $b = t$  die Minimalstelle.

Für  $0 \leq t \leq \frac{\sqrt{2}}{30}(8 - \sqrt{19})$  ist  $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , für  $\frac{\sqrt{2}}{30}(8 - \sqrt{19}) \leq t \leq 0.4153626403$  ist  $b = b_9$ , für  $0.4153626403 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$  ist  $b = \sqrt{\frac{1-t^2}{2}}$  und für  $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq t \leq \frac{8+\sqrt{19}}{15\sqrt{2}}$  ist  $b = b_{10}$  sowie für  $\frac{8+\sqrt{19}}{15\sqrt{2}} \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  ist  $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$  die Maximalstelle.

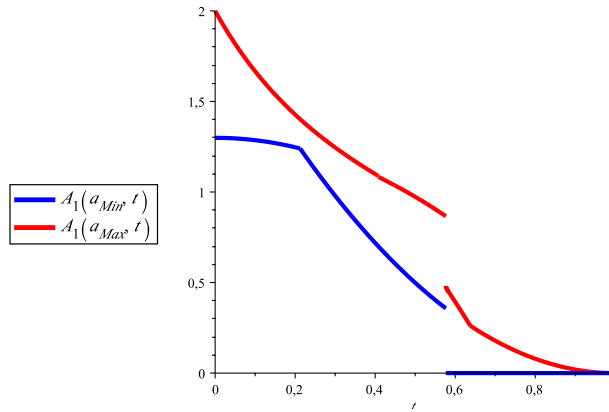


Abbildung 5.9: Verlauf der ■ Minima und ■ Maxima von  $A_1(\cdot, t)$  auf  $S_1^1$

Durch den Vergleich der Minimal- und Maximalstellen aller Fälle erhalten wir die Behauptung (siehe Abb. 5.9).  $\square$

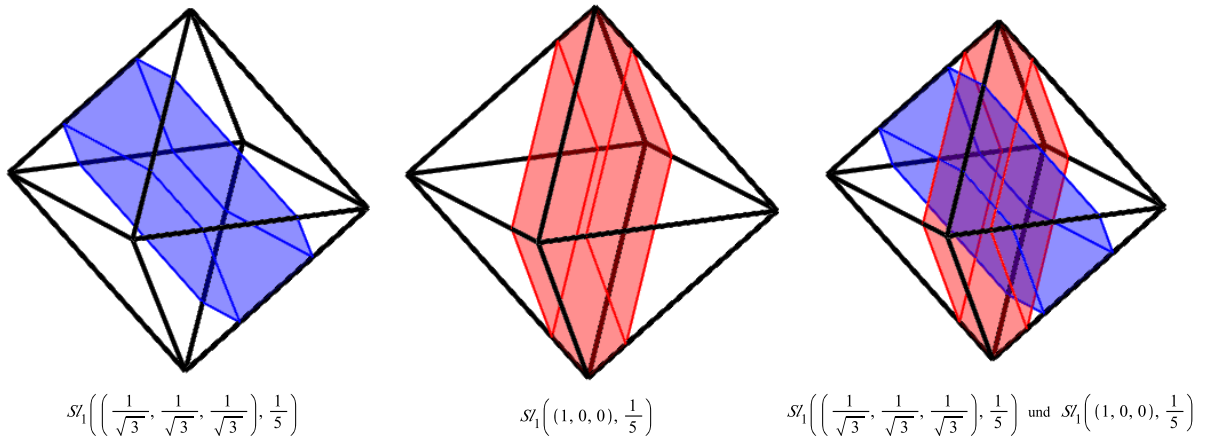
Der letzte Satz dieses Abschnittes befasst sich mit dem globalen Minima und Maxima von  $V_1$  im 3-dimensionalen Fall. Der Beweis des Satzes orientiert sich an den Ideen von Satz 5.17.

**Satz 5.18.** Seien  $m = 1$  und  $n = 3$ . Für alle  $a \in S_1^1 = \{a \in S^1 : 1 \geq a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq 0\}$  und  $t \in \mathbb{R}_{>a_1}$  gilt  $V_{1,mn}(a, t) = \frac{4}{3}$ . In Abhängigkeit des Parameters  $t \in [0, 1]$  erhalten wir die nachfolgenden absoluten Minima und Maxima der Funktion  $V_{1,mn}(\cdot, t)$  auf  $S_1^1$ :

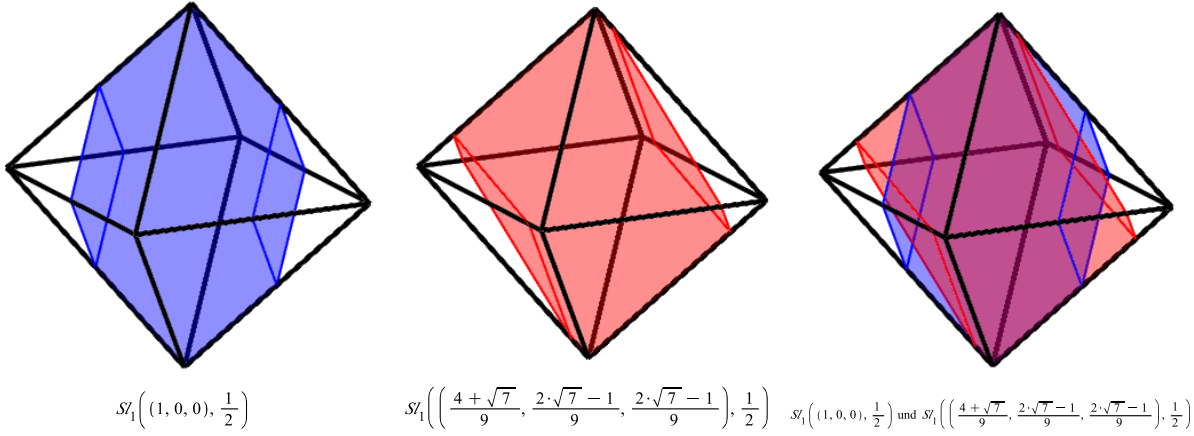
Absolute Minima von $V_{1,3}(\cdot, t)$ auf $S_1^1$		
$t$	$a_{Min}$	$V_{1,3}(a_{Min}, t)$
$\left[0, \frac{12-\sqrt{33}}{8+3\sqrt{3}}\right]$	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}t(3-t^2)$
$\left[\frac{12-\sqrt{33}}{8+3\sqrt{3}}, 1\right]$	$(1, 0, 0)$	$\frac{4}{3}t(3-3t+t^2)$

Absolute Maxima von $V_{1,3}(\cdot, t)$ auf $S_1^1$		
$t$	$a_{Max}$	$V_{1,3}(a_{Max}, t)$
$\left[0, \frac{2}{5}\right]$	$(1, 0, 0)$	$\frac{4}{3}t(3-3t+t^2)$
$\left[\frac{2}{5}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$	$\left(\frac{\frac{1}{9t}(2+\sqrt{4-9t^2})}{\frac{1}{9t}\sqrt{45t^2-4-2\sqrt{4-9t^2}}}, \frac{1}{9t}\sqrt{45t^2-4-2\sqrt{4-9t^2}}}\right)^T$	$\frac{1}{27}\left(27t^2+28-(4-9t^2)^{\frac{3}{2}}\right)$
$\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right]$	$\left\{(a_1, a_2, a_3) : a_1 \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, t\right]\right\}$	$\frac{4}{3}$


 Abbildung 5.10: ■ Minima und ■ Maxima von  $V_1(\cdot, t)$  auf  $S_1^1$ 

**Beweis.** Zunächst berechnen wir die Funktionswerte  $V_1((a_1, a_2, a_2), t)$ ,  $V_1\left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), t\right)$ ,  $V_1((a_1, a_1, a_3), t)$ ,  $V_1((a_1, a_2, 0), t)$ ,  $V_1\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), t\right)$  und  $V_1((1, 0, 0), t)$ . Es gelten mit den

Abbildung 5.11: ■ Minima und ■ Maxima von  $V_1(\cdot, t)$  auf  $S_1^1$ 

Gleichungen (5.38), (5.41), (5.42), (5.43), (5.44), (5.45) und (5.46) für alle  $t \in \mathbb{R}_{>0}$  die Identitäten

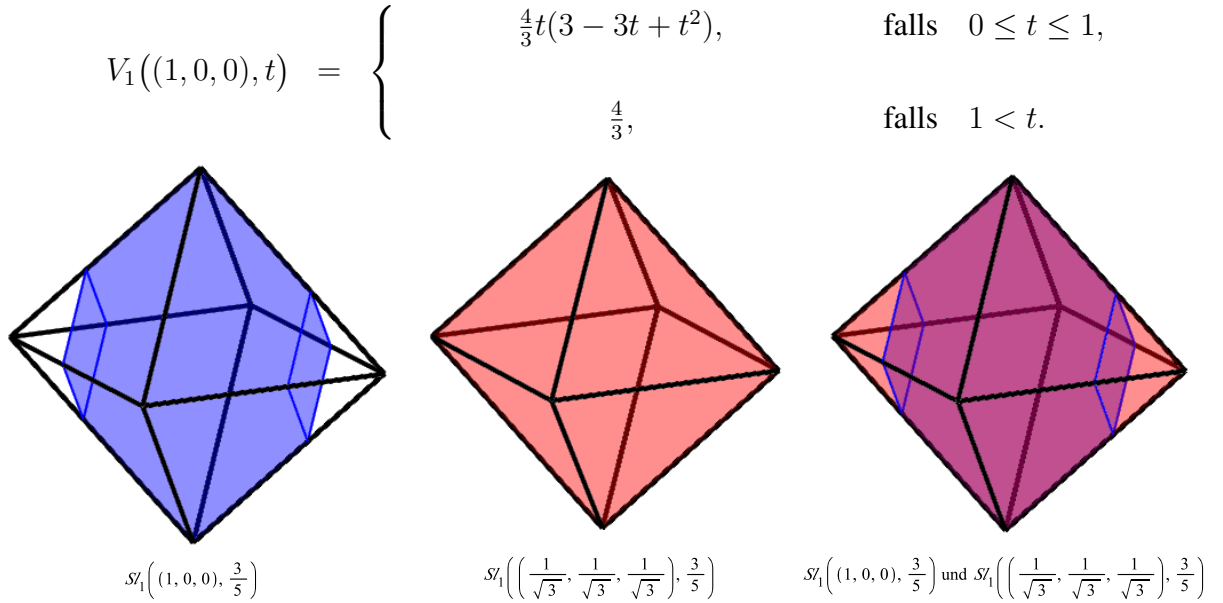
$$(5.51) \quad V_1((a_1, a_2, a_2), t) = \begin{cases} \frac{2}{3} \frac{t(6a_1a_2+3a_2^2-t^2)}{a_2(a_1+a_2)^2}, & \text{falls } 0 \leq t \leq a_2, \\ \frac{4}{3} \frac{a_2^4-2a_1a_2^2+3a_1^3t-3a_1^2t^2+a_1t^3}{(a_1^2-a_2^2)^2}, & \text{falls } a_2 \leq t \leq a_1, \\ \frac{4}{3}, & \text{falls } a_1 \leq t, \end{cases}$$

$$V_1\left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), t\right) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}t(3-t^2), & \text{falls } 0 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ \frac{4}{3}, & \text{falls } \frac{1}{\sqrt{3}} < t, \end{cases}$$

$$(5.52) \quad V_1((a_1, a_1, a_3), t) = \begin{cases} \frac{2}{3} \frac{t(6a_1a_3+3a_1^2-t^2)}{a_1(a_1+a_3)^2}, & \text{falls } 0 \leq t \leq a_3, \\ \frac{2}{3} \frac{3a_1^4t-a_1^2t^3-9a_1^2a_3^2t+2a_1a_3^4+6a_1a_3^2t^2-a_3^2t^3}{a_1(a_1^2-a_3^2)^2}, & \text{falls } a_3 \leq t \leq a_1, \\ \frac{4}{3}, & \text{falls } a_1 \leq t, \end{cases}$$

$$(5.53) \quad V_1((a_1, a_2, 0), t) = \begin{cases} \frac{4}{3} \frac{(3a_1a_2-t^2)t}{a_1a_2(a_1+a_2)}, & \text{falls } 0 \leq t \leq a_2, \\ \frac{4}{3} \frac{t^3-3a_1t^2+3a_1^2t-a_1a_2^2}{a_1(a_1^2-a_2^2)}, & \text{falls } a_2 \leq t \leq a_1, \\ \frac{4}{3}, & \text{falls } a_1 \leq t, \end{cases}$$

$$V_1\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), t\right) = \begin{cases} \sqrt{2}t(2-\frac{4}{3}t^2), & \text{falls } 0 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \frac{4}{3}, & \text{falls } \frac{1}{\sqrt{2}} < t, \end{cases}$$


 Abbildung 5.12: ■ Minima und ■ Maxima von  $V_1(\cdot, t)$  auf  $S_1^1$ 

Damit erhalten wir mit Satz 5.14 für alle  $a \in S_1^1$  und  $t \in \mathbb{R}_{>0}$  die Gleichheit

$$V_1(a, t) = \begin{cases} \frac{4}{3} \frac{t(3(a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3) - t^2)}{(a_1 + a_2)(a_1 + a_3)(a_2 + a_3)}, & \text{für } 0 \leq t \leq a_3, \\ \frac{4}{3} \left( \frac{a_3^4 + 3a_3^2t^2}{(a_1^2 - a_3^2)(a_2^2 - a_3^2)} - \frac{3(a_3^2(a_1^2 + a_2^2) - a_1^2a_2^2 + a_1a_2a_3^2)t + (a_1a_2 + a_3^2)t^3}{(a_1 + a_2)(a_1^2 - a_3^2)(a_2^2 - a_3^2)} \right), & \text{für } a_3 \leq t \leq a_2, \\ \frac{4}{3} \left( 1 - \frac{a_1(a_1 - t)^3}{(a_1^2 - a_2^2)(a_1^2 - a_3^2)} \right), & \text{für } a_2 \leq t \leq a_1, \\ \frac{4}{3}, & \text{für } a_1 < t. \end{cases}$$

Wenn wir die Lagrange-Methode anwenden, reicht es die Gleichung

$$(5.54) \quad \nabla V_1((a_1, a_2, a_3), t) = \lambda(a_1, a_2, a_3)$$

für alle  $t \in [0, 1]$  nach  $(a_1, a_2, a_3)$  und  $\lambda$  zu lösen.

$0 \leq t \leq a_3$ : Aus der Gleichung (5.54) ergibt sich für diesen Fall eine notwendige Bedingung für die Extremstellen der Funktion  $V_1(\cdot, t)$ . Die Tripel  $(a_1, a_2, a_3)$ , die die Gleichung (5.54) lösen, haben die folgende Gestalt

$$(a_1, a_2, a_3) = (b, b, \sqrt{1 - 2b^2})$$

oder  $(a_1, a_2, a_3) = (\sqrt{1 - 2b^2}, b, b).$

Also beschränken wir die Suche auf diese Art von Tripeln. Zunächst ist noch anzumerken, dass das Tripel  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$  eine Lösung der Gleichung (5.54) ist.

$a_3 \leq t \leq a_2$ : Auch für diesen Fall ergibt sich aus der Gleichung (5.54) eine notwendige Bedingung für die Extremstellen der Funktion  $V_1(\cdot, t)$ . Die Tripel  $(a_1, a_2, a_3)$ , die die Gleichung (5.54) lösen, haben die folgende Gestalt

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, a_3) &= (\sqrt{1-b^2}, b, 0) \\ \text{oder} \quad (a_1, a_2, a_3) &= (b, \sqrt{1-b^2}, 0) \\ \text{oder} \quad (a_1, a_2, a_3) &= (b, b, \sqrt{1-2b^2}). \end{aligned}$$

$a_2 \leq t \leq a_1$ : Für die Maximalstellen der Funktion  $V_1(\cdot, t)$  betrachten wir die Ungleichungen

$$(5.55) \quad \frac{4}{3} \left( 1 - \frac{a_1(a_1-t)^3}{(a_1^2-a_2^2)(a_1^2-a_3^2)} \right) \leq \frac{4}{3} \left( 1 - \frac{a_1(a_1-t)^3}{(a_1^2-a_3^2)^2} \right)$$

$$(5.56) \quad \leq \frac{4}{3}.$$

Für  $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq t$  wird nach Ungleichung (5.56) die Maximalstelle für  $a_1 = t$  angenommen. Für  $0 \leq t < \frac{1}{\sqrt{3}}$  wird das Maximum nach Ungleichung (5.55) in den Punkten der Gestalt  $(a_1, a_2, a_3) = (\sqrt{1-2b^2}, b, b)$  angenommen. Weiter betrachten wir für die Minimalstelle die Ungleichungen

$$(5.57) \quad \frac{4}{3} \left( 1 - \frac{a_1(a_1-t)^3}{(a_1^2-a_2^2)(a_1^2-a_3^2)} \right) \geq \frac{4}{3} \left( 1 - \frac{a_1(a_1-t)^3}{(a_1^2-a_2^2)^2} \right)$$

$$(5.58) \quad \geq \frac{4}{3} \left( 1 - \frac{a_1(a_1-a_2)}{(a_1+a_2)^2} \right).$$

Nach Ungleichung (5.58) wird für  $0 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$  das Maximum der Funktion  $V_1(\cdot, t)$  in den Punkten der Gestalt  $(a_1, a_2, a_3) = (\sqrt{1-2t^2}, t, t)$  angenommen. Nach Ungleichung (5.57) wird das Minimum für  $\frac{1}{\sqrt{3}} < t$  in den Punkten der Gestalt  $(a_1, a_2, a_3) = (\sqrt{1-2b^2}, b, b)$  angenommen.

Nun betrachten wir die Funktion  $V_1(\cdot, t)$  in den relevanten Punkten. Mit der Identität (5.53) erhalten wir für alle  $0 \leq b \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  die Gleichheit

$$V_1\left((\sqrt{1-b^2}, b, 0), t\right) = \begin{cases} \frac{4}{3} \frac{(3\sqrt{1-b^2}b-t^2)t}{\sqrt{1-b^2}b(\sqrt{1-b^2}+b)}, & \text{falls } 0 \leq t \leq b, \\ \frac{4}{3} \frac{t^3-3\sqrt{1-b^2}t^2+3(1-b^2)t-\sqrt{1-b^2}b^2}{\sqrt{1-b^2}(1-2b^2)}, & \text{falls } b \leq t \leq \sqrt{1-b^2}, \\ 0, & \text{falls } \sqrt{1-b^2} \leq t. \end{cases}$$



$0 \leq t \leq b$ : Es gilt unter unseren Voraussetzungen die Äquivalenz

$$\begin{aligned} & \frac{d}{db} \left( \frac{4}{3} \frac{(3\sqrt{1-b^2}b - t^2)t}{\sqrt{1-b^2}(\sqrt{1-b^2} + b)} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ & \text{oder } b = \frac{1}{6} \sqrt{18 - 6\sqrt{9 - 12t^2 - 18t^4 - 6\sqrt{12t^6 + 9t^8}}} =: b_1 \\ & \text{für } \frac{1}{6} \sqrt{21 - 3\sqrt{17}} \leq t \leq \frac{\sqrt{30}}{10}. \end{aligned}$$

Für  $0 \leq t \leq 0.5266506114$  ist  $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$  und für  $0.5266506114 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  ist  $b = t$  die Minimalstelle. Für  $0 \leq t \leq \frac{1}{6} \sqrt{21 - 3\sqrt{17}}$  ist  $b = t$ , für  $\frac{1}{6} \sqrt{21 - 3\sqrt{17}} \leq t \leq \frac{\sqrt{30}}{10}$  ist  $b = b_1$  und für  $\frac{\sqrt{30}}{10} \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  ist  $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$  die Maximalstelle.

$b \leq t \leq \sqrt{1-b^2}$ : Es gilt unter unseren Voraussetzungen die Äquivalenz

$$\begin{aligned} & \frac{d}{db} \left( \frac{4}{3} \frac{t^3 - 3\sqrt{1-b^2}t^2 + 3(1-b^2)t - \sqrt{1-b^2}b^2}{\sqrt{1-b^2}(1-2b^2)} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \quad b = 0 \\ & \quad b = \sqrt{1-t^2} \text{ für } \frac{1}{\sqrt{2}} \leq t \leq 1 \\ & \text{oder } b = \frac{\sqrt{30t^2 - 2 - 2\sqrt{1+6t^2}}}{6t} =: b_2 \text{ für } \frac{2}{5} \leq t \leq \frac{1}{6} \sqrt{21 - 3\sqrt{17}}. \end{aligned}$$

Für  $0 \leq t \leq 0.4337094884$  ist  $b = t$  und für  $0.4337094884 \leq t \leq 1$  ist  $b = 0$  die Minimalstelle. Für  $0 \leq t \leq \frac{2}{5}$  ist  $b = 0$ , für  $\frac{2}{5} \leq t \leq \frac{1}{6} \sqrt{21 - 3\sqrt{17}}$  ist  $b = b_2$ , für  $\frac{1}{6} \sqrt{21 - 3\sqrt{17}} \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  ist  $b = t$  und für  $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq t \leq 1$  ist  $b = \sqrt{1-t^2}$  die Maximalstelle.

Mit der Identität (5.53) erhalten wir für alle  $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq b \leq 1$  die Gleichheit

$$V_1 \left( (b, \sqrt{1-b^2}, 0), t \right) = \begin{cases} \frac{4}{3} \frac{(3b\sqrt{1-b^2} - t^2)t}{b\sqrt{1-b^2}(b + \sqrt{1-b^2})}, & \text{falls } 0 \leq t \leq \sqrt{1-b^2}, \\ \frac{4}{3} \frac{t^3 - 3bt^2 + 3b^2t - b(1-b^2)}{b(2b^2-1)}, & \text{falls } \sqrt{1-b^2} \leq t \leq b, \\ 0, & \text{falls } b \leq t. \end{cases}$$

$0 \leq t \leq \sqrt{1-b^2}$ : Es gilt unter unseren Voraussetzungen die Äquivalenz

$$\begin{aligned} & \frac{d}{db} \left( \frac{4}{3} \frac{(3b\sqrt{1-b^2} - t^2)t}{b\sqrt{1-b^2}(b + \sqrt{1-b^2})} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ & \text{oder } b = \frac{1}{6} \sqrt{18 + 6\sqrt{9 - 12t^2 - 18t^4 - 6\sqrt{12t^6 + 9t^8}}} =: b_3 \\ & \text{für } \frac{1}{6} \sqrt{21 - 3\sqrt{17}} \leq t \leq \frac{\sqrt{30}}{10}. \end{aligned}$$

Für  $0 \leq t \leq 0.5266506114$  ist  $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$  und für  $0.5266506114 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  ist  $b = \sqrt{1-t^2}$  die Minimalstelle. Für  $0 \leq t \leq \frac{1}{6}\sqrt{21-3\sqrt{17}}$  ist  $b = \sqrt{1-t^2}$ , für  $\frac{1}{6}\sqrt{21-3\sqrt{17}} \leq t \leq \frac{\sqrt{30}}{10}$  ist  $b = b_3$  und für  $\frac{\sqrt{30}}{10} \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  ist  $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$  die Maximalstelle.

$\sqrt{1-b^2} \leq t \leq b$ : Es gilt unter unseren Voraussetzungen die Äquivalenz

$$\begin{aligned} & \frac{d}{db} \left( \frac{4t^3 - 3bt^2 + 3b^2t - b(1-b^2)}{3b(2b^2-1)} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \quad b = \frac{1 + \sqrt{1+6t^2}}{6t} =: b_4 \text{ für } \frac{2}{5} \leq t \leq \frac{1}{6}\sqrt{21-3\sqrt{17}} \\ & \text{oder } b = t \text{ für } \frac{1}{\sqrt{2}} \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

Für  $0 \leq t \leq 0.4337094884$  ist  $b = \sqrt{1-t^2}$  und für  $0.4337094884 \leq t \leq 1$  ist  $b = 1$  die Minimalstelle.

Für  $0 \leq t \leq \frac{2}{5}$  ist  $b = 1$ , für  $\frac{2}{5} \leq t \leq \frac{1}{6}\sqrt{21-3\sqrt{17}}$  ist  $b = b_4$ , für  $\frac{1}{6}\sqrt{21-3\sqrt{17}} \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  ist  $b = \sqrt{1-t^2}$  und für  $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq t \leq 1$  ist  $b = t$  die Maximalstelle.

Mit der Identität (5.51) erhalten wir für alle  $0 \leq b \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$  die Gleichheit

$$\begin{aligned} & V_1 \left( (\sqrt{1-2b^2}, b, b), t \right) \\ = & \begin{cases} \frac{2}{3} \frac{t(6\sqrt{1-2b^2}b + 3b^2 - t^2)}{b(\sqrt{1-2b^2}+b)^2}, & \text{falls } 0 \leq t \leq b, \\ \frac{4}{3} \frac{b^4 - 2(1-2b^2)b^2 + 3(1-2b^2)^{\frac{3}{2}}t - 3(1-2b^2)t^2 + \sqrt{1-2b^2}t^3}{(1-3b^2)^2}, & \text{falls } b \leq t \leq \sqrt{1-2b^2}, \\ 0, & \text{falls } \sqrt{1-2b^2} \leq t. \end{cases} \end{aligned}$$

$0 \leq t \leq b$ : Es gilt unter unseren Voraussetzungen die Äquivalenz

$$\begin{aligned} & \frac{d}{db} \left( \frac{2t(6\sqrt{1-2b^2}b + 3b^2 - t^2)}{3b(\sqrt{1-2b^2}+b)^2} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \quad b = \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Für  $0 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$  ist  $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$  die Minimalstelle und  $b = t$  die Maximalstelle.

$b \leq t \leq \sqrt{1-2b^2}$ : Es gilt unter unseren Voraussetzungen die Äquivalenz

$$\begin{aligned} & \frac{d}{db} \left( \frac{4b^4 - 2(1-2b^2)b^2 + 3(1-2b^2)^{\frac{3}{2}}t - 3(1-2b^2)t^2 + \sqrt{1-2b^2}t^3}{3(1-3b^2)^2} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \quad b = 0 \\ & \text{oder } b = \frac{\sqrt{45t^2 - 4 - 2\sqrt{4-9t^2}}}{9t} =: b_5 \text{ für } \frac{2}{5} \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \\ & \text{oder } b = \sqrt{\frac{1-t^2}{2}} \text{ für } \frac{1}{\sqrt{3}} \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

Für  $0 \leq t \leq 0.4495207224$  ist  $b = t$  und für  $0.4495207224 \leq t \leq 1$  ist  $b = 0$  die Minimalstelle. Für  $0 \leq t \leq \frac{2}{5}$  ist  $b = 0$ , für  $\frac{2}{5} \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$  ist  $b = b_5$  und für  $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq t \leq 1$  ist  $b = \sqrt{\frac{1-t^2}{2}}$  die Maximalstelle.

Mit der Identität (5.52) erhalten wir für alle  $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq b \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  die Gleichung

$$V_1 \left( (b, b, \sqrt{1-2b^2}), t \right) = \begin{cases} \frac{2}{3} \frac{t(6b\sqrt{1-2b^2} + 3b^2 - t^2)}{b(b + \sqrt{1-2b^2})^2}, & \text{falls } 0 \leq t \leq \sqrt{1-2b^2}, \\ \frac{2}{3} \frac{21b^4t + b^2t^3 - 9b^2t + 6bt^2 - 12b^3t^2 - t^3 + 2b - 8b^3 + 8b^5}{b(1-3b^2)^2}, & \text{falls } \sqrt{1-2b^2} \leq t \leq b, \\ 0, & \text{falls } b \leq t. \end{cases}$$

$0 \leq t \leq \sqrt{1-2b^2}$ : Es gilt unter unseren Voraussetzungen die Äquivalenz

$$\frac{d}{db} \left( \frac{2}{3} \frac{t(6b\sqrt{1-2b^2} + 3b^2 - t^2)}{b(b + \sqrt{1-2b^2})^2} \right) = 0 \Leftrightarrow b = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Für  $0 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$  ist  $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$  die Minimalstelle und  $b = \sqrt{\frac{1-t^2}{2}}$  die Maximalstelle.

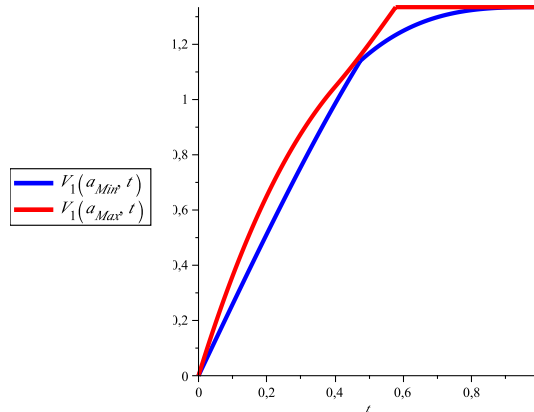


Abbildung 5.13: Verlauf der ■ Minima und ■ Maxima von  $V_1(\cdot, t)$  auf  $S_1^1$

$\sqrt{1-2b^2} \leq t \leq b$ : Es gilt unter unseren Voraussetzungen die Äquivalenz

$$\begin{aligned} & \frac{d}{db} \left( \frac{2}{3} \frac{21b^4t + b^2t^3 - 9b^2t + 6bt^2 - 12b^3t^2 - t^3 + 2b - 8b^3 + 8b^5}{b(1-3b^2)^2} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & t = b \\ \text{oder } t = & \frac{1}{2} \frac{(63b^4 - 34b^2 - 1 - \sqrt{3969b^8 - 4860b^6 + 2214b^4 - 444b^2 + 33})b}{1 - 14b^2 + 9b^4} =: t_1(b). \end{aligned}$$

Es ist  $t_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{10}$  und  $t_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Mit der Taylorapproximation

$$t_1(b) = \sqrt{3} - 2b - \frac{3^{\frac{5}{4}}}{\sqrt{2}} \left(b - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{3}{2}} + \mathcal{O}\left(\left(b - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)$$

von  $t_1$  im Punkte  $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$  erhalten wir eine Näherung der Extremstelle

$$b_6 := t_1^{-1}(t) \approx \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{9} \left( \frac{2\sqrt{2}3^{\frac{3}{4}}}{9} + \frac{\varphi_6(t)}{36} + \frac{8}{\sqrt{3}\varphi_6(t)} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \left( \frac{\varphi_6(t)}{18} - \frac{16}{\sqrt{3}\varphi_6(t)} \right) \right)^2,$$

wobei  $\varphi_6(t) := \left( 7596\sqrt{2}3^{\frac{1}{4}} - 8748\sqrt{2}3^{\frac{3}{4}}t - 324\sqrt{1074\sqrt{3} - 7596t + 4374\sqrt{3}t^2} \right)^{\frac{1}{3}}$ .

Für  $0 \leq t \leq 0.4645787918$  ist  $b = \sqrt{\frac{1-t^2}{2}}$  und für  $0.4645787918 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  ist  $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$  die Minimalstelle.

Für  $0 \leq t \leq \frac{3\sqrt{2}}{10}$  ist  $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , für  $\frac{3\sqrt{2}}{10} \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$  ist  $b = b_6$  und für  $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  ist  $b = t$  die Maximalstelle.

Durch den Vergleich der Minimal- und Maximalstellen aller Fälle erhalten wir die Behauptung (siehe Abb. 5.13).  $\square$

# Kapitel 6

## Schnitte im regulären Simplex

Bisher haben wir konvexe und sternförmige ursprungssymmetrische Körper des Raumes  $(\mathbb{R}^m)^n$  studiert. In diesem Kapitel wollen wir uns auch einem konvexen aber nicht mehr ursprungssymmetrischen Körper aus dem  $\mathbb{R}^n$  widmen, nämlich dem regulären Simplex.

Webb hat sich in seiner Dissertation [36] bei Ball u. a. mit Schnitten durch den Ursprung des Simplex beschäftigt. Er fand dort eine obere Schranke für das Volumen solcher Schnitte. Diese Schranke wird sogar in gewissen Normalenvektoren angenommen. Damit ist sie gleichzeitig das Maximum.

Im Artikel [36, S. 19] von Webb wird die Definition des eingebetteten  $n$ -dimensionalen regulären Simplex in den  $\mathbb{R}^{n+1}$  genutzt und für diesen eine Volumenformel aufgestellt. Diese Definition benötigen wir in diesem Kapitel auch. Deshalb notieren wir die

**Definition 6.1.** Für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $t \in \mathbb{R}_{>0}$  definieren wir durch

$$S_t := S_{n,t} := \left\{ x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^{n+1} : \sum_{j=1}^{n+1} x_j = t \right\}$$

den regulären  $n$ -dimensionalen Simplex (siehe Abb. 6.1).

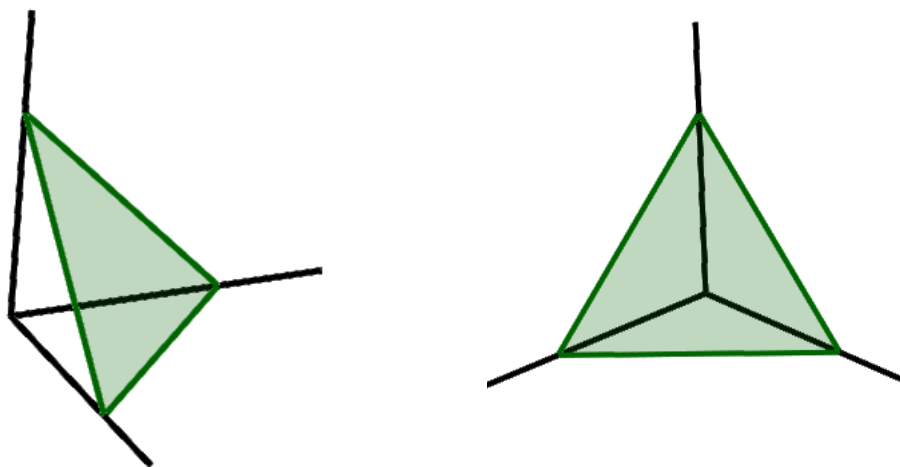


Abbildung 6.1: ■ 2-dimensionale reguläre Simplex  $S_{2,1}$  in  $\mathbb{R}^3$

Um eine bessere Vorstellung für den  $n$ -dimensionalen regulären Simplex  $S_{n,t}$  zu bekommen und dabei gleichzeitig eine Bedingung für Hyperebenen, die die Schnitte durch den Schwerpunkt des regulären Simplex in  $\mathbb{R}^{n+1}$  erzeugen, zu erlangen, betrachten wir die

**Bemerkung 6.2.** Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Für alle  $t \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $a \in \mathbb{R}^{n+1}$  gelten die Aussagen

$$(i) \ S_t = \text{konv} \left\{ te_j : j \in \mathbb{N}_{\leq n+1} \right\} \text{ und}$$

$$(ii) \text{ falls } \sum_{j=1}^{n+1} a_j = 0, \text{ so ist } H_a^0 \cap S_t \text{ ein } (n-1)\text{-dimensionaler Schnitt in } S_t \text{ durch den Schwerpunkt von } S_t.$$

Als nächstes führen wir eine Bezeichnung für den  $(n-1)$ -dimensionalen Schnitt durch den Schwerpunkt des Simplex ein.

**Bezeichnung 6.3.** Für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $a \in \mathbb{R}^{n+1}$  mit  $\sum_{j=1}^{n+1} a_j = 0$  wird durch

$$A_{S_1}(a) := A_{S_{n,1},n-1}(a) := \text{vol}_{n-1} \left( H_a^0 \cap S_{n,1} \right)$$

das  $(n-1)$ -dimensionale Volumen des Schnittes  $H_a^0 \cap S_{n,1}$  definiert.

Ziel dieses Kapitels ist es, eine untere Schranke für das Volumen von Schnitten durch den Schwerpunkt des regulären Simplex anzugeben. Die Schranke wird nicht optimal sein, aber wir werden eine Vermutung äußern, in welcher Richtung die minimalen Schnitte durch den Schwerpunkt zu finden sind und diese dann diskutieren.

## 6.1 Volumenformel für Schnitte durch den Schwerpunkt

Um das Volumen der Schnitte durch den Ursprung überhaupt abschätzen zu können, benötigen wir eine Volumenformel. Das Vorhaben dieses Abschnittes ist es, eine Volumenformel für Schnitte durch den Ursprung des regulären Simplex aufzustellen. Wir werden uns sogar zwei Formeln erarbeiten, wobei sich die zweite aus der ersten ergibt. Die zweite Formel benötigen wir deshalb, weil wir mit ihr die Vermutung äußern können, dass die minimalen Schnitte in gewissen Richtungen liegen. Die erste Formel liefert uns Webb in [36, S. 20]. Dort zeigte er uns unter Anwendung von log-konkaven Dichten die folgende Volumenformel für Schnitte durch den Schwerpunkt:

**Satz 6.4.** Für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $a \in \mathbb{R}^{n+1}$  mit  $\sum_{j=1}^{n+1} a_j = 0$  gilt die Volumenformel

$$(6.1) \quad A_{S_{n,1},n-1}(a) = \frac{\sqrt{n+1}}{(n-1)!} \int_{H_a^0} \left( \prod_{j=1}^{n+1} \chi_{[0,\infty)}(x_j) e^{-x_j} \right) dx.$$

Mit Hilfe der Volumenformel (6.1) aus Satz 6.4 zeigte er für gewisse Richtungen  $a \in S^n$  die weitere Volumenformel

$$(6.2) \quad A_{S_{n,1},n-1}(a) = \frac{\sqrt{n+1}}{2(n-1)!} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{|a_j|} \left( \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n+1} \frac{a_j}{a_j - a_k} \right).$$

Diese Formel ergibt sich sofort aus dem folgenden

**Satz 6.5.** Für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $a \in S^n$  mit paarweise verschiedenen Komponenten ungleich Null und  $\sum_{j=1}^{n+1} a_j = 0$  gilt die folgende Volumenformel für Schnitt durch den Schwerpunkt des Simplex Richtung  $a$ :

$$(6.3) \quad A_{S_{n,1},n-1}(a) = \frac{\sqrt{n+1}}{(n-1)!} \sum_{\substack{j=1 \\ a_j > 0}}^{n+1} \frac{a_j^{n-1}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n+1} (a_j - a_k)} = -\frac{\sqrt{n+1}}{(n-1)!} \sum_{\substack{j=1 \\ a_j < 0}}^{n+1} \frac{a_j^{n-1}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n+1} (a_j - a_k)}.$$

**Beweis.** Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $a \in S^n$  mit paarweise verschiedenen Komponenten ungleich Null,  $\sum_{j=1}^{n+1} a_j = 0$  und  $X_1, \dots, X_{n+1}$  stochastisch unabhängige, identisch verteilte Zufallsgrößen mit der Dichte  $f^{X_j} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto \chi_{[0,\infty)}(x)e^{-x}$  für alle  $j \in \mathbb{N}_{\leq n+1}$ . Die Dichte der Zufallsgröße  $\sum_{j=1}^{n+1} a_j X_j$  ist gleich

$$(6.4) \quad G_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, t \mapsto \int_{H_a^0 + ta} \left( \prod_{j=1}^{n+1} \chi_{[0,\infty)}(x_j) e^{-x_j} \right) dx.$$

Nach [36, S. 23] von Webb gilt für alle  $t \in \mathbb{R}$  die Gleichheit

$$(6.5) \quad G_a(t) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \left( \prod_{j=1}^{n+1} (1 + ia_j s)^{-1} \right) e^{ist} ds.$$

Damit und mit Satz 6.4 erhalten wir die Gleichung

$$(6.6) \quad A_{S_1}(a) = \frac{\sqrt{n+1}}{(n-1)!} G_a(0) = \frac{\sqrt{n+1}}{(n-1)!} (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \left( \prod_{j=1}^{n+1} (1 + ia_j s)^{-1} \right) ds.$$

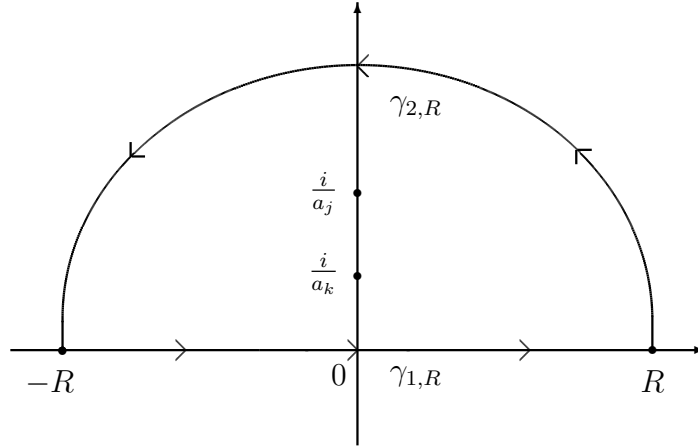
In den nächsten Schritten wollen wir das Integral  $G_a(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  berechnen. Sei zunächst  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Die Funktion

$$F_a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto 2\pi \left( \prod_{j=1}^{n+1} (1 + ia_j z) \right) e^{-izt}$$

hat in  $\frac{i}{a_j}$  eine Nullstelle 1-ter Ordnung für alle  $j \in \mathbb{N}_{\leq n+1}$ . Definieren wir für alle  $R \in \mathbb{R}_{>0}$  die Integrationswege

$$\gamma_{1,R} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, s \mapsto -R(1-s) + Rs \quad \text{und} \quad \gamma_{2,R} : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}, s \mapsto Re^{is},$$

so integrieren wir die Funktion  $\frac{1}{F_a}$  über den Weg  $\Gamma_R := \gamma_{1,R} + \gamma_{2,R}$  (siehe Abb. 6.2).

Abbildung 6.2: Integrationsweg  $\Gamma_R = \gamma_{1,R} + \gamma_{2,R}$ 

Mit dem Residuensatz erhalten wir für alle  $R \in \mathbb{R}_{>0}$  die Gleichung

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Gamma_R} \frac{1}{F_a(z)} dz \\
 &= 2\pi i \sum_{\substack{j=1 \\ a_j > 0}}^{n+1} \text{res}_{a_j} \left( \frac{1}{F_a} \right) \\
 &= i \sum_{\substack{j=1 \\ a_j > 0}}^{n+1} \left( \frac{d}{dz} \Big|_{z=\frac{i}{a_j}} F_a(z) \right)^{-1} \\
 &= i \sum_{\substack{j=1 \\ a_j > 0}}^{n+1} \left( \left( \sum_{l=1}^{n+1} \left( \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{n+1} (1 + ia_k z) \right) \right) ia_l e^{-izt} - \left( \prod_{k=1}^{n+1} (1 + ia_k z) \right) it e^{-izt} \right) \Big|_{z=\frac{i}{a_j}} \right)^{-1} \\
 &= \sum_{\substack{j=1 \\ a_j > 0}}^{n+1} \left( \left( \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n+1} \left( 1 - \frac{a_k}{a_j} \right) \right) a_j e^{\frac{t}{a_j}} \right)^{-1} \\
 &= \sum_{\substack{j=1 \\ a_j > 0}}^{n+1} \frac{1}{a_j} \left( \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n+1} \frac{a_j}{a_j - a_k} \right) e^{-\frac{t}{a_j}}.
 \end{aligned}$$

Weiter ergibt sich mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz die Ungleichung

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \left| \int_{\gamma_{2,R}} \frac{1}{F_a(z)} dz \right| \\
 &= \left| iR(2\pi)^{-1} \int_0^\pi \left( \prod_{j=1}^{n+1} (1 + ia_j R e^{is}) \right)^{-1} e^{iRe^{is}t} e^{is} ds \right|
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&\leq R(2\pi)^{-1} \int_0^\pi \left( \prod_{j=1}^{n+1} |1 + ia_j R e^{is}|^{-1} \right) e^{-R \sin(s)t} ds \\
&\stackrel{(R \text{ groß})}{\leq} (2\pi)^{-1} \int_0^\pi e^{-R \sin(s)t} ds \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

Schließlich bekommen wir dann die Gleichung

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{j=1 \\ a_j > 0}}^{n+1} \frac{1}{a_j} \left( \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n+1} \frac{a_j}{a_j - a_k} \right) e^{-\frac{t}{a_j}} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \frac{1}{F_a(z)} dz \\
&= \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \int_{\gamma_{1,R}} \frac{1}{F_a(z)} dz + \int_{\gamma_{2,R}} \frac{1}{F_a(z)} dz \right) \\
&= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{1,R}} \frac{1}{F_a(z)} dz \\
&= G_a(t).
\end{aligned}$$

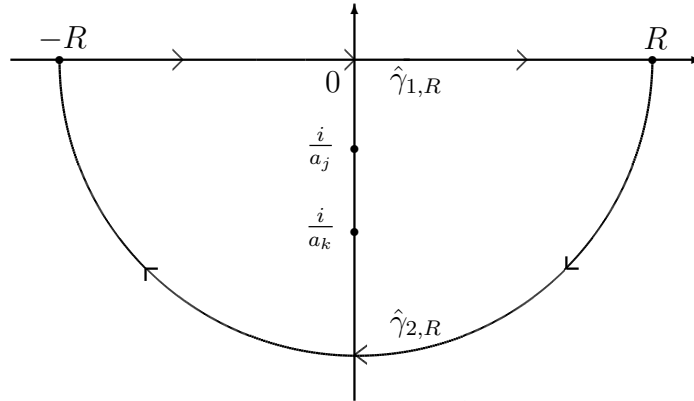


Abbildung 6.3: Integrationsweg  $\hat{\Gamma}_R = \hat{\gamma}_{1,R} + \hat{\gamma}_{2,R}$

Für  $t \in \mathbb{R}_{\leq 0}$  erhalten wir die Identität  $G_a(t) = - \sum_{\substack{j=1 \\ a_j < 0}}^{n+1} \frac{1}{a_j} \left( \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n+1} \frac{a_j}{a_j - a_k} \right) e^{-\frac{t}{a_j}}$ , indem wir über den

Integrationsweg  $\hat{\Gamma}_R = \hat{\gamma}_{1,R} + \hat{\gamma}_{2,R}$  für alle  $R \in \mathbb{R}_{>0}$  integrieren (siehe Abb. 6.3).  $\square$

## 6.2 Untere Schranke für Schnitte durch den Schwerpunkt

Mit der Volumenformel (6.1) aus Satz 6.4 arbeitete Webb in [36, S. 23] weiter und zeigte für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $a \in S^n$  mit  $\sum_{j=1}^{n+1} a_j = 0$  sowie  $v \in V_{n,\max}$  die Ungleichung

$$A_{S_{n,1,n-1}}(a) \leq A_{S_{n,1,n-1}}(v) = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}(n-1)!},$$

wobei  $V_{n,\max} := \left\{ v \in S^n : \sum_{j=1}^{n+1} a_j = 0 \text{ und } n-1 \text{ Komponenten von } a \text{ sind } 0 \right\}$ .

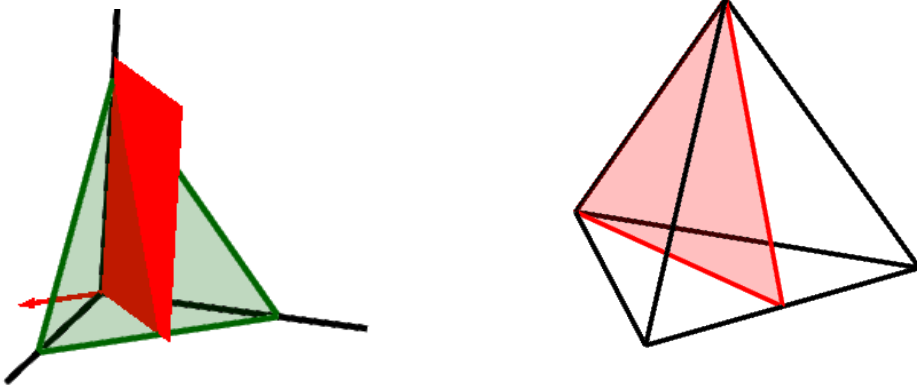


Abbildung 6.4:  $\blacksquare H^0_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)}$  und  $\blacksquare S_{2,1}$

$\blacksquare H^0_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)} \cap S_{3,1}$

Die Abbildung 6.4 veranschaulicht einen maximalen eindimensionalen bzw. einen maximalen zweidimensionalen Schnitt durch den Schwerpunkt des Simplex  $S_{2,1}$  bzw.  $S_{3,1}$ .

Kommen wir jetzt zu der unteren Schranke für das Volumen von Schnitten bzw. zunächst zum minimalen Schnitt durch den Schwerpunkt. Studieren wir die Volumenformel (6.3) aus Satz 6.5 genauer, so liegt die Vermutung nahe, dass der minimale Schnitt durch den Schwerpunkt des Simplex parallel zu einer Außenfläche des Simplex verläuft (siehe Abb. 6.5). Genauer heißt das, dass das Volumen minimal wird, wenn wir den Schnitt senkrecht zum Normalenvektor  $w_n := \frac{1}{\sqrt{n+1}}(-v_n, \sqrt{n})$  betrachten, denn in diesem Fall hätten wir in der Volumenformel (6.3) für diesen Normalenvektor nur einen Summanden mit einem großen Nenner. Zu bemerken bleibt noch, dass die Permutation der Einträge des Vektors  $w_n$  natürlich auch einen minimalen Normalenvektor ergibt. Bezeichnen wir sie mit  $w_{n,\sigma}$  für alle Permutationen  $\sigma \in S_{n+1}$ .

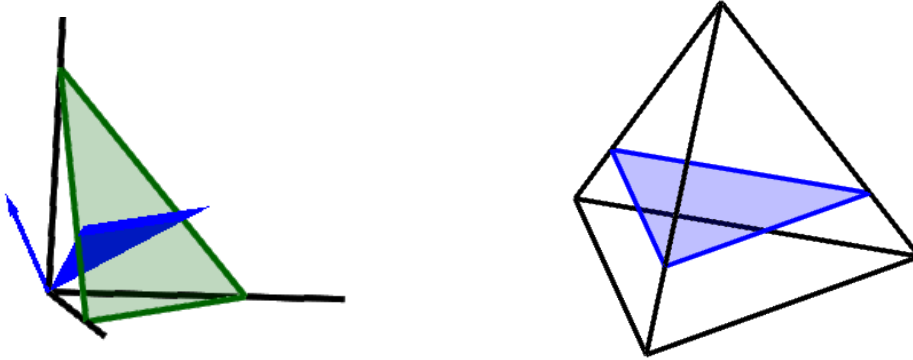


Abbildung 6.5:  $\blacksquare H^0_{\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)}$  und  $\blacksquare S_{2,1}$

$\blacksquare H^0_{\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \cap S_{3,1}$

Formal würden wir also für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a \in S^n$  mit  $\sum_{j=1}^{n+1} a_j = 0$  und  $\sigma \in S_{n+1}$  die folgende Ungleichung erhalten:

$$(6.7) \quad A_{S_{n,1},n-1}(a) \geq A_{S_{n,1},n-1}(w_{n,\sigma}) = \frac{\sqrt{n+1}}{(n-1)!} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-\frac{1}{2}} \gtrapprox \frac{\sqrt{n+1}}{(n-1)!} \frac{1}{e}.$$

Offensichtlich ist die Folge  $\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-\frac{1}{2}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  streng monoton fallend gegen  $e^{-1}$ .

Die Ungleichung, die wir für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $a \in S^n$  mit  $\sum_{j=1}^{n+1} a_j = 0$  in den nächsten Schritten beweisen werden, lautet:

$$(6.8) \quad A_{S_{n,1},n-1}(a) \geq \frac{\sqrt{n+1}}{(n-1)!} \frac{1}{\sqrt{3e}} \frac{1}{e}.$$

Dabei erhalten wir die Ungleichung (6.7) bis auf den Faktor  $\frac{1}{\sqrt{3e}}$ .

Es sei noch angemerkt, dass das Volumen des Schnittes durch den Schwerpunkt vom Simplex  $S_{n,1}$ , der Parallel zu einer Fläche von  $S_{n,1}$  verläuft, gleich dem Produkt aus dem Volumen von  $S_{n-1,1}$  mit der  $(n-1)$ -ten Potenz vom Verhältnis der Höhen in  $S_{n,1}$  ist, weil für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $\sigma \in S_{n+1}$  die folgende Gleichung gilt:

$$\begin{aligned} \text{vol}_{n-1}(S_{n-1,1}) \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n-1} &= \frac{\sqrt{n}}{(n-1)!} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n-1} \\ &= \frac{\sqrt{n+1}}{(n-1)!} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n-\frac{1}{2}} \\ &= A_{S_{n,1},n-1}(w_{n,\sigma}). \end{aligned}$$

Bevor wir auf die Abschätzung (6.8) eingehen, führen wir noch zwei Lemmata ein. Das erste beschäftigt sich mit dem Flächeninhalt unter positiven log-konkaven Dichten. Im zweiten formulieren wir eine Integralabschätzung für monoton fallende, positive Funktionen, die wir aus [24] von Koldobsky entnehmen.

**Lemma 6.6.** Für alle log-konkaven, stetigen Dichten  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit  $\int_{\mathbb{R}} f(t)t dt = 0$  und  $\int_{\mathbb{R}} f(t)t^2 dt = 1$  gilt die Abschätzung

$$e^{-1} \leq \min \left\{ \int_{-\infty}^0 f(t) dt, \int_0^{\infty} f(t) dt \right\}.$$

**Beweis.** Sei  $F$  die Verteilungsfunktion von  $f$ . Nach dem Theorem 6 (i) von Bagnoli und Bergstrom aus [2, S. 9] reicht es, die Ungleichung  $F(0) = \int_{-\infty}^0 f(t) dt \geq e^{-1}$  zu zeigen.

Da  $f$  log-konkav ist, folgt aus dem Theorem 1 (i) von Bagnoli und Bergstrom aus [2, S. 4], dass  $F$  auch log-konkav ist. Damit gilt für die Tangente an  $F$  in 0 für alle  $x \in \mathbb{R}$  die Ungleichung

$$\log(F(x)) \leq \log(F(0)) + \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left( \log(F(t)) \right) x = \log(F(0)) + \frac{f(0)}{F(0)} x.$$

Diese Ungleichung ist für alle  $x \in \mathbb{R}$  äquivalent zu der Ungleichung

$$(6.9) \quad F(x) \leq F(0) e^{\frac{f(0)}{F(0)} x}.$$

Weiterhin gilt offensichtlich für alle  $x \in \mathbb{R}$  die Abschätzung  $F(x) \leq 1$ . Die Ungleichung (6.9) ist nur für  $x \leq -\frac{F(0)}{f(0)} \log(F(0)) =: x_0$  ( $0 < x_0$ ) interessant, da für alle  $x \in \mathbb{R}_{\geq x_0}$  die folgende Ungleichung gilt:

$$F(x) e^{-\frac{f(0)}{F(0)} x} \leq F(x) e^{-\frac{f(0)}{F(0)} x_0} = F(x) F(0) \leq F(0).$$

Als nächstes nutzen wir ein Ergebnis von Paouris aus [32], um die Tails von  $f$  abzuschätzen. Nach Paouris existiert ein  $C \in \mathbb{R}_{>0}$  so, dass für alle  $t \in \mathbb{R}_{\geq C}$  die Ungleichung

$$\int_{|s| \geq t} f(s) ds \leq e^{-\frac{t}{C}}$$

gilt. Damit erhalten wir insbesondere eine Abschätzung der Verteilungsfunktion  $F$  nach unten. Es ergibt sich für alle  $t \in \mathbb{R}_{\geq C}$  die Ungleichung

$$(6.10) \quad 1 - e^{-\frac{t}{C}} \leq \int_{-t}^t f(s) ds \leq \int_{-\infty}^t f(s) ds = F(t).$$

Insgesamt erhalten wir für alle  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  mit  $\frac{1}{\varepsilon} > C$  und partieller Integration die Ungleichung

$$\begin{aligned} 0 &\geq \left( \int_{\mathbb{R}} f(t)t dt = 0 \right) \int_{-\infty}^{\frac{1}{\varepsilon}} f(t)t dt \\ &= tF(t) \Big|_{-\infty}^{\frac{1}{\varepsilon}} - \int_{-\infty}^{\frac{1}{\varepsilon}} F(t) dt \\ &\stackrel{(6.9)}{\geq} \frac{1}{\varepsilon} F\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) - \int_{-\infty}^{x_0} F(0) e^{\frac{f(0)}{F(0)}t} dt - \int_{x_0}^{\frac{1}{\varepsilon}} 1 dt \\ &\stackrel{(6.10)}{\geq} \frac{1}{\varepsilon} \left(1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon C}}\right) - \frac{(F(0))^2}{f(0)} e^{\frac{f(0)}{F(0)}t} \Big|_{-\infty}^{x_0} - \left(\frac{1}{\varepsilon} - x_0\right) \\ &= -\frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{1}{\varepsilon C}} - \frac{F(0)}{f(0)} - \frac{F(0)}{f(0)} \log(F(0)). \end{aligned}$$

Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  ergeben sich dann die äquivalenten Ungleichungen

$$0 \geq -\frac{F(0)}{f(0)} - \frac{F(0)}{f(0)} \log(F(0)) \Leftrightarrow F(0) \geq e^{-1}.$$

□

Der Beweis des nächsten Lemmas kann in [24, S. 147] nachgelesen werden.

**Lemma 6.7.** Sei  $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  eine monoton fallende stetige Funktion mit  $\int_0^{\infty} f(t)t^2 dt < \infty$ , die integrierbar auf  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  ist. Es gilt die Ungleichung

$$3(f(0))^2 \int_0^{\infty} f(t)t^2 dt \geq \left( \int_0^{\infty} f(t) dt \right)^3.$$

Wir können nun das Hauptresultat dieses Kapitels formulieren. Wir zeigen darin die oben diskutierte Abschätzung (6.8) mit Hilfe der Funktion  $G_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, t \mapsto \int_{H_a^0 + ta}^{\infty} \left( \prod_{j=1}^{n+1} \chi_{[0, \infty)}(x_j) e^{-x_j} \right) dx$  aus (6.4).

**Satz 6.8** (Hauptsatz). *Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist das Minimum der Schnitte durch den Schwerpunkt des regulären Simplex  $S_{n,1}$  größer gleich als der Wert  $\frac{\sqrt{n+1}}{(n-1)!} \frac{1}{\sqrt{3e}} \frac{1}{e}$ , d. h. für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $a \in S^n$  mit  $\sum_{j=1}^{n+1} a_j = 0$  gilt die Ungleichung*

$$\frac{\sqrt{n+1}}{(n-1)!} \frac{1}{\sqrt{3e}} \frac{1}{e} \leq A_{S_{n,1},n-1}(a).$$

**Beweis.** Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $a \in S^n$  mit  $\sum_{j=1}^{n+1} a_j = 1$ . Die Dichte  $G_a$ , die in (6.4) definiert wurde, ist stetig und log-konkav mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} G_a(t) t \, dt &= E \left( \sum_{j=1}^{n+1} a_j X_j \right) = \sum_{j=1}^{n+1} a_j = 0 \quad \text{und} \\ \int_{\mathbb{R}} G_a(t) t^2 \, dt &= \text{var} \left( \sum_{j=1}^{n+1} a_j X_j \right) = \sum_{j=1}^{n+1} a_j^2 = 1. \end{aligned}$$

Mit Identität (6.6) gilt die Gleichheit  $A_{S_1}(a) = \frac{\sqrt{n+1}}{(n-1)!} G_a(0)$ . Also reicht es  $G_a(0)$  nach unten abzuschätzen.

Aus der log-Konkavität von  $G_a$  folgt, dass  $G_a|_{\mathbb{R}_{\leq 0}}$  oder  $G_a|_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$  monoton fallend ist. Ohne Einschränkung sei  $G_a|_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$  monoton fallend. Mit Lemma 6.7 erhalten wir die Ungleichung

$$3(G_a(0))^2 \int_0^{\infty} G_a(t) t^2 \, dt \geq \left( \int_0^{\infty} G_a(t) \, dt \right)^3.$$

Damit erhalten wir die gewünschte Abschätzung

$$3(G_a(0))^2 \underset{\left(\int_{\mathbb{R}} G_a(t) t^2 \, dt = 1\right)}{\geq} 3(G_a(0))^2 \int_0^{\infty} G_a(t) t^2 \, dt \geq \left( \int_0^{\infty} G_a(t) \, dt \right)^3 \underset{\text{(Lemma 6.6)}}{\geq} e^{-3}. \quad \square$$



# Literaturverzeichnis

- [1] M. Abramowitz, I. Stegun; *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, INC., New York (1972).
- [2] M. Bagnoli, T. Bergstrom; *Log-concave probability and its applications*, Econom. Theory 26, no. 2 (2005).
- [3] K. Ball; *Cube slicing in  $\mathbb{R}^n$* , Proc. AMS 97 (1986).
- [4] F. Barthe, *Extremal properties of central half-spaces for product measures*, J. Funct. Anal. 182 (2001).
- [5] F. Barthe, A. Koldobsky; *Extremal slabs in the cube and the Laplace transform*, Advances in Math. 174 (2003).
- [6] H. Busemann, C. M. Petty; *Problems on convex bodies*, Math. Scand., 4 (1956).
- [7] A. M. Caetano; *Weyl numbers in sequence spaces and sections of unit balls*, J. Funct. Anal. 106 (1992).
- [8] H. D. Ebbinghaus et al; *Zahlen*, 3. Auflage, Springer-Verlag (1992).
- [9] J. Elstrodt; *Maß- und Integrationstheorie*, Springer (1996).
- [10] R. J. Gardner, A. Koldobsky and Th. Schlumprecht; *An analytic solution to the Busemann-Petty problem on sections of convex bodies*, Annals of Math. 149 (1999)
- [11] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik; *Table of integrals, series and products*, 5 Auflage, Academic Press, Inc. (1994)
- [12] U. Haagerup; *The best constants in the Khintchine inequality*, Studia Math. 70 (3) (1982).
- [13] H. Hadwiger; *Gitterperiodische Punktmengen und Isoperimetrie*, Monatsh. Math. 76 (1972).
- [14] D. Hensley; *Slicing the cube in  $\mathbb{R}^n$  and probability*, Proc. AMS 73 (1979).
- [15] H. Hethcote; *Error bounds for asymptotic expansions of zeros of transcendental functions*, SIAM J. Math. Anal. 1 (1970).
- [16] J. C. Jantzen, J. Schwermer; *Algebra*, Springer (2006).
- [17] N.J. Kalton, A. Koldobsky; *Intersection bodies and  $L_p$ -spaces*, Adv. Math. 196 (2005).

- [18] H. König, A. Koldobsky; *Minimal volume of slabs in the complex cube*, to appear in Proc. AMS (2011/12).
- [19] H. König, A. Koldobsky; *Volumes of low-dimensional slabs and sections in the cube*, Adv. in Appl. Math. (2011).
- [20] K. Königsberger; *Analysis 2*, 5. Auflage, Springer-Verlag (2003).
- [21] A. Koldobsky; *An application of the Fourier transform to sections of star bodies*, Israel J. Math. 106 (1998).
- [22] A. Koldobsky; *A functional analytic approach to intersection bodies*, Geom. Funct. Anal. 10 (2000).
- [23] A. Koldobsky, M. Zymonopoulou; *Extremal sections of complex  $l_p$ -balls*,  $0 < p \leq 2$ , Studia Math. 159 (2003).
- [24] A. Koldobsky; *Fourier Analysis in Convex Geometry*, American Mathematical Society (2005).
- [25] S. Lang; *Algebra*, Springer (2002).
- [26] P. S. Laplace; *Théorie analytique des probabilités*, Paris (1812).
- [27] M. Meyer, A. Pajor; *Sections of the Unit Ball of  $l_p^n$* , J. Funct. Anal. 80 (1988).
- [28] F. Nazarov, A. Podkorytov; *Ball, Haagerup and distribution functions*, Oper. Th. Adv. Appl. 1134, Birkhäuser, Basel, (2000).
- [29] K. Oleszkiewicz; *On  $p$ -pseudostable random variables, Rosenthal spaces and  $l_p^n$  ball slicing*, GAFA Seminar Volume, Lecture Notes in Math. 1807, Springer, (2003).
- [30] K. Oleszkiewicz, A. Pełczyński; *Polydisc slicing in  $\mathbb{C}^n$* , Studia Math. 142 (2000).
- [31] T. W. Palmer; *Banach Algebras and the General Theory of  $*$ -Algebras II*, Cambridge University Press (2001).
- [32] G. Paouris; *Concentration of mass on convex bodies*, Geom. Funct. Anal. 16, no. 5 (2006).
- [33] G. Pólya; *Berechnung eines bestimmten Integrals*, Math. Ann. 74 (1913).
- [34] J.D. Vaaler; *A geometric inequality with applications to linear forms*, Pacific J. Math. 83 (1979).
- [35] G. N. Watson; *Theory of Bessel Functions*, Cambridge at the University Press (1966).
- [36] S. Webb; *Central Slices of the Regular Simplex*, Geometriae Dedicata 61 (1996).
- [37] D. Werner; *Funktionalanalysis*, 6. Auflage, Springer-Verlag (2007).
- [38] D. V. Widder; *The Laplace Transform*, Princeton University Press (1941).
- [39] V. M. Zolotarev; *One-dimensional stable distributions*, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1986).



# Symbolverzeichnis

$\mathbb{A}$	der Raum $\mathbb{R}^\eta \times \mathbb{C}^\vartheta \times \mathbb{H}^\xi$ mit $\eta + 2\vartheta + 4\xi = m$
$\mathbb{A}^n$	das $\mathbb{A}$ -Modul
$\mathcal{A}$	die $\sigma$ -Algebra oder die Ereignisalgebra
$A_{p,m(n-1)}(a, \tau), A_p(a, \tau)$	das $m(n-1)$ -dimensionale Volumen des Schnittes $S_p(a, \tau)$
$A_{S_{n,1},n-1}(a), A_{S_1}(a)$	das $(n-1)$ -dimensionale Volumen des Schnittes $S_{n,1} \cap H_a^0$
$ \alpha $	Summe über alle $\alpha_j$ , wobei $\alpha \in \mathbb{N}^n$
$\approx$	asymptotisch äquivalent
$ \cdot $	die Betragsfunktion
$\overline{B}_2(0, \varepsilon)$	die abgeschlossene Kugel mit Radius $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ um $0_{\mathbb{R}^n}$ bzgl. $\ \cdot\ _2$
$\overline{B}_{2,p}(0, 1)$	die abgeschlossene Einheitskugel bzgl. $\ \cdot\ _{2,p}$
$\overline{B}_{2,\infty}(0, r_m), (\overline{B}_2(0, r_m))^n$	die normierte abgeschlossene Einheitskugel bzgl. $\ \cdot\ _{2,\infty}$
$B_a$	die $a$ -Basis aus Lemma 1.19
$\mathbb{C}$	die komplexen Zahlen
$C^\infty(X, Y)$	die Menge der unendlich oft differenzierbaren Funktionen von $X$ nach $Y$
$\chi_M$	die Indikatorfunktion der Menge $M$
$\dim_{\mathbb{R}}(U)$	die Dimension des Teilraumes $U$ in $\mathbb{R}^n$
$d\lambda$	das Lebesgue-Maß
$dP$	das Wahrscheinlichkeitsmaß
$\det(A)$	die Determinante der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$\frac{d^l}{ds^l} \Big _{s=t} f(s)$	die $l$ -te Ableitung der Abbildung $f$ im Punkte $t$
$D^\alpha$	$D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} = \frac{d^{\alpha_1}}{dx_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{d^{\alpha_n}}{dx_n^{\alpha_n}}$ , wobei $\alpha \in \mathbb{N}^n$
$\partial M$	der Rand der Menge $M$
$\langle f, \cdot \rangle$	die durch $f$ erzeugte Distribution
$\langle M \rangle_{\text{Alg}}$	das Algebra-Erzeugnis der Menge $M$
$\langle M \rangle_{\text{Vek}}$	das Vektorraum-Erzeugnis der Menge $M$
$\langle M \rangle_{\mathbb{R}}$	das Vektorraum-Erzeugnis der Menge $M$ in $\mathbb{R}^n$
$1_{\mathbb{A}}, 1_{\mathbb{R}^m}$	$\underbrace{(1, \dots, 1)}_{m\text{-mal}}$
$\mathcal{E}$	die Standardbasis von $\mathbb{A}^n$
$E(X)$	der Erwartungswert der Zufallsvariablen $X$

$*$	die Faltungsrelation
$f_m$	siehe Definition 3.8
$\widehat{f}$	die Fourier-Transformierte von $f$
$\widehat{\cdot}$	die Fourier-Transformation
$\text{Grad}(p)$	der Grad des Polynoms $p$
$\Gamma$	die Gammafunktion
$g_m$	siehe Definition 3.9
$g_p$	die Abbildung $e^{-\ \cdot\ _2^p}$
$\gamma_p$	siehe Satz 5.9
$\mathbb{H}$	die Quaternionenalgebra
$H_a^\tau$	die affine Hyperebene senkrecht zum Normalenvektor $a$ mit Abstand $\tau$ von $0_{\mathbb{A}}$
$h_m$	siehe Definition 3.9
$\text{Im}(z)$	der Imaginärteil der komplexen Zahl $z$
$I_{\mathbb{R}^m}$	die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{m \times m}$
$\cong$	die Algebrasomorphismusrelation
$\text{Alg}$	
$\cong$	die Isomorphismusrelation
$J_\nu$	die Besselfunktion $\nu$ -ter Ordnung
$j_\nu$	die normierte Besselfunktion $\nu$ -ter Ordnung
$\text{konv}(M)$	die konvexe Hülle von $M$
$\overline{(\cdot)}$	die Konjugation in $\mathbb{A}$
$\kappa_m$	das $m$ -dimensionale Volumen der Einheitskugel $\overline{B}_2(0, 1)$ in $\mathbb{R}^m$
$l_p^n(l_2^m)$	der Raum $((\mathbb{R}^m)^n, \ \cdot\ _{2,p})$
$L_1(\mathbb{R}_{>0}, \mathbb{R}_{>0}, s^{m-1}ds)$	die Menge der absolut integrierbaren Funktionen von $\mathbb{R}_{>0}$ nach $\mathbb{R}_{>0}$ bzgl. des Maßes $s^{m-1}ds$
$L_{1,\text{lok}}(\mathbb{R}^{mn}, \mathbb{R})$	die Menge der lokal absolut integrierbaren Funktionen von $\mathbb{R}^{mn}$ nach $\mathbb{R}$
$\mu$	ein Maß
$M_\varphi$	Matrixdarstellung der Funktion $\varphi$ bzgl. der Standardbasis des Raumes $\mathbb{R}^n$
$\mathbb{N}$	die natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$N_{m,k}$	die $k$ -te Nullstelle der Besselfunktion $J_{\frac{m}{2}}$
$N'_\nu$	die erste Nullstelle der Ableitung der Besselfunktion $J_\nu$
$\nabla(f)$	der Gradient von $f$
$\ \cdot\ _2$	die euklidische Norm
$\ \cdot\ _\infty$	die Maximumsnorm
$\ \cdot\ _{\text{op}}$	die Operatornorm
$\ \cdot\ _\varphi$	die Norm $\ \cdot\ _{\text{op}} \circ \varphi$

$\ \cdot\ _{2,p}$	die Norm aus Definition 1.1
$\ \cdot\ _{2,p,\varepsilon}$	die „aufgedickte“ Norm der Norm $\ \cdot\ _{2,p}$
$\ \cdot\ _{(N)}$	die Norm aus Bezeichnung 5.1
$O(\mathbb{R}^m)$	die Menge der orthogonalen Abbildungen auf $\mathbb{R}^m$
$\Omega$	eine Ergebnismenge
$(\Omega, \mathcal{A}, P)$	ein Wahrscheinlichkeitsraum
$0_{\mathbb{A}}, 0_{\mathbb{R}^m}$	$(\underbrace{0, \dots, 0}_{m\text{-mal}})$
$\cdot_{\varphi}$	das Produkt auf $\mathbb{R}^m$ (siehe Definition 1.3)
$\Phi_m, \tilde{\Phi}_m$	siehe Definition 3.16
$\psi_m$	siehe Lemma 3.13
$\mathbb{Q}$	die rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	die reellen Zahlen
$\mathbb{R}^{m \times m}$	die Menge der $m \times m$ -Matrizen über $\mathbb{R}$
$(\mathbb{R}^m)^n$	isomorph zu $\mathbb{A}^n$
$\mathbb{R}[x]$	der Polynomring über $\mathbb{R}$
$\mathbb{R}[x]/p\mathbb{R}[x]$	der Quotientenring faktorisiert nach dem Ideal $p\mathbb{R}[x]$
$\mathbb{R}_m$	siehe Lemma 1.2
$r_m$	$\kappa_m^{-\frac{1}{m}}$
$\operatorname{Re}(z)$	der Realteil der komplexen Zahl $z$
$\operatorname{res}_z(f)$	das Residuum von $f$ in $z$
$\rho_m, \tilde{\rho}_m$	siehe Definition 3.16
$[f]$	die Restklasse von $f$ in $\mathbb{R}[x]/p\mathbb{R}[x]$
$S_p(a, \tau)$	der Schnitt $\overline{B}_{2,p}(0, 1) \cap H_a^\tau$
$S_\infty(a, \tau)$	der Schnitt $\overline{B}_{2,\infty}(0, r_m) \cap H_a^\tau$
$Sl_p(a, \tau)$	die Schicht in $\overline{B}_{2,p}(0, 1)$ der „Breite“ $\tau$
$Sl_\infty(a, \tau)$	die Schicht in $\overline{B}_{2,\infty}(0, r_m)$ der „Breite“ $\tau$
$S_n$	die Menge der Permutationen der Menge $\mathbb{N}_{\leq n}$
$S^{n-1}$	die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^n$
$S_m^{n-1}$	die spezielle Einheitssphäre in $\mathbb{A}^n$
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^{mn}, \mathbb{R}), \mathcal{S}$	die Menge der Schwartzfunktionen
$\operatorname{sign}$	die Vorzeichenfunktion
$S_{n,t}, S_t$	die Einbettung des $n$ -dimensionalen regulären Simplex in den $\mathbb{R}^{n+1}$
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}}$	das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$	das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{C}^n$
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{A}}$	das „Standardskalarprodukt“ auf dem $\mathbb{A}^n$
$M^{\perp_{\mathbb{R}}}$	der Senkrechttraum der Menge $M$ in $\mathbb{R}^n$
$A^T$	die Transposition der Matrix $A$
$\otimes$	das Tensorprodukt
$f \mid g$	die Teiltrelation in $\mathbb{R}[x]$
$\nmid$	nicht $\mid$

$V_{p,nm}(a, t), V_p(a, t)$	das $mn$ -dimensionale Volumen des Schnittes $Sl_p(a, \tau)$
$V_{\infty,nm}(a, t), V_{\infty}(a, t)$	das $mn$ -dimensionale Volumen des Schnittes $Sl_{\infty}(a, \tau)$
$\text{vol}_n$	das $n$ -dimensionale Volumen bzgl. $\mathbb{R}$
$v_k$	der Vektor $\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{k}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{k}}, 0, \dots, 0\right)}_{k\text{-mal}}$ aus $\mathbb{R}^n$
$\text{var}(X)$	die Varianz der Zufallsvariablen $X$
$(X, \mathcal{A}, \mu)$	ein Maßraum
$Z_m^n$	der Zylinder $\mathbb{R}^m \times (\overline{B}_2(0, r_m))^{n-1}$

# Index

- $\mathbb{A}$ -Modul, 17
- \*-Involution, 16
- $\alpha$ -Basis, 19
- „aufgedickte“ Norm, 105
- absolute Maxima, 129
- absolute Minima, 129
- affine Hyperebene, 17
- analytische Volumenformel, 27
- asymptotischer Verlauf, 39
- Basis von  $(\mathbb{R}^m)^n$ , 20
- Besselfunktion, 25
- $C^*$ -Algebra, 16
- Distribution, 101
- Einheitskugel, 10
- Einheitswürfel, 10
- Fourier-Transformation für Distributionen, 102
- Gültigkeitsbereich, 71
- Halbkugel, 82
- Hyperebene, 17
- isotrope Position, 81
- komplementäre Verteilungsfunktion, 43
- log-konkav, 71
- lokal integrierbar, 101
- lokal-konvex, 101
- lokal-konvexer topologischer Raum, 101
- moderates Wachstum, 101
- Norm, 9
- Normalenvektoren, 17
- normierte Besselfunktion, 25
- normierte Einheitskugel, 9
- normierter Raum, 9
- obere Halbkugel, 82
- Quaternionenalgebra, 15
- radiale Funktion, 102
- rasch fallend, 101
- Raum der Distributionen, 101
- regulärer Simplex, 153
- Schicht in  $\overline{B}_{2,p}(0, 1)$ , 21
- Schnitt in  $\overline{B}_{2,p}(0, 1)$ , 21
- Schnitt in  $S_t$ , 154
- Simplex, 153
- Standardskalarprodukt, 17
- stochastische Volumenformel, 31
- Tail, 160
- Testfunktion, 101
- Topologie, 101
- unital, 16
- untere Halbkugel, 82
- unvollständige Gammafunktion, 74
- Vandermondedeterminante, 115
- Vektormultiplikation, 12
- Verteilungsfunktion, 159
- Volumen des Schnittes  $H_a^0 \cap S_{n,1}$ , 154
- Volumen von  $S_p(a, \tau)$ , 21
- Volumen von  $Sl_p(a, \tau)$ , 21
- Volumenformel, 27
- Volumenformel für  $S_{n,1}$ , 154
- Zylinder, 37



# Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit abgesehen von der Beratung durch den Betreuer meiner Promotion unter Einhaltung guter wissenschaftlicher Praxis selbstständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe. Diese Arbeit hat weder ganz noch in Teilen an anderer Stelle im Rahmen eines Prüfungsverfahrens vorgelegen. Des Weiteren versichere ich, noch keinen Promotionsversuch unternommen zu haben.

Kiel, den 14. November 2011

.....  
(Patryk Brzezinski)





# Lebenslauf

## Persönliche Daten

---

Name	Patryk Brzezinski
Geburtsdatum und -ort	14. Dezember 1982, Karthaus
Familienstand	ledig
Nationalität	deutsch

## Schulbildung

---

08/1989 - 07/1993	Besuch der Grundschule Obereider in Rendsburg
08/1993 - 07/1999	Besuch der Christian-Timm-Realschule in Rendsburg
08/1999 - 06/2002	Besuch des Fachgymnasiums in Rendsburg
06/2002	Abitur

## Hochschullaufbahn

---

10/2002 - 09/2003	Studium der Mathematik und Physik für das Lehramt an Gymnasien an der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel
10/2003 - 02/2009	Studium der Mathematik und Sportwissenschaft für das Lehramt an Gymnasien an der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel
09/2004	Zwischenprüfung im Fach Mathematik
09/2007	Zwischenprüfung im Fach Sportwissenschaft
04/2005 - 02/2009	Studentische Hilfskraft am Mathematischen Seminar der CAU Kiel
02/2009	1. Staatsexamen für das Lehramt an Gymnasien
seit 03/2009	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Mathematischen Seminar der CAU Kiel

Kiel, den 14. November 2011

.....  
(Patryk Brzezinski)





